This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

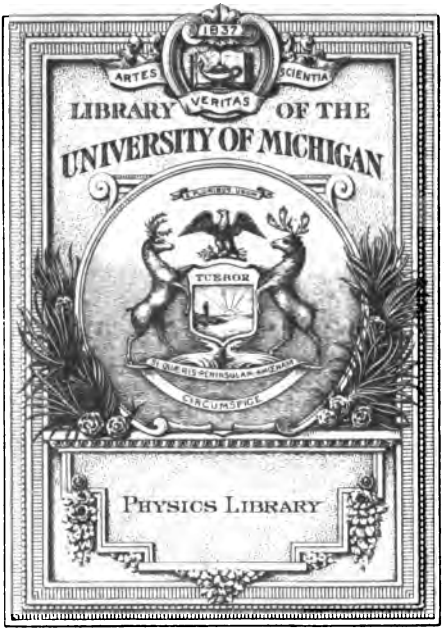
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 459087 DUPL


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
PHYSICS LIBRARY

Physics lib.
QC
331
.P71

PHYSICS. LAB.
QC
331
.P71

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER WÄRMESTRAHLUNG

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER WÄRMESTRAHLUNG

VON

Karl Ernst Ludwig

DR. MAX PLANCK,

PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK
AN DER UNIVERSITÄT BERLIN

MIT 6 ABBILDUNGEN

LEIPZIG, 1906
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

P. [illegible]
Q [illegible]
3 [illegible]
P11

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Vorwort.

In dem vorliegenden Buche ist der Hauptinhalt der Vorlesungen wiedergegeben, welche ich im Wintersemester 1905/6 an der Berliner Universität gehalten habe. Ursprünglich war es nur meine Absicht gewesen, die Ergebnisse meiner eigenen, vor zehn Jahren begonnenen Untersuchungen über die Theorie der Wärmestrahlung in eine zusammenhängende Darstellung zu vereinigen; doch bald zeigte es sich als wünschenswert, auch die Grundlagen dieser Theorie, von den KIRCHHOFFschen Sätzen über das Emissions- und Absorptionsvermögen angefangen, mit in die Behandlung hineinzuziehen, und so machte ich den Versuch, ein Lehrbuch zu schreiben, welches zugleich auch zur Einführung in das Studium der gesamten Theorie der strahlenden Wärme auf einheitlicher thermodynamischer Grundlage zu dienen geeignet ist. Dementsprechend nimmt die Darstellung ihren Ausgang von den einfachen bekannten Erfahrungssätzen der Optik, um durch allmähliche Erweiterung und Hinzuziehung der Ergebnisse der Elektrodynamik und der Thermodynamik zu den Problemen der spektralen Energieverteilung und der Irreversibilität vorzudringen. Hierbei bin ich öfters, wo es mir sachliche oder didaktische Gründe nahelegten, von der sonst üblichen Art der Betrachtung abgewichen, so insbesondere bei der Ableitung der KIRCHHOFFschen Sätze, der Berechnung des MAXWELLschen Strahlungsdrucks, der Ableitung des WIENschen Verschiebungsgesetzes und seiner Verallgemeinerung auf Strahlungen von beliebiger spektraler Energieverteilung. Die Resultate meiner eigenen Untersuchungen habe ich überall an den entsprechenden Stellen mit in die Darstellung hineingearbeitet. Ein Verzeichnis derselben findet sich zur bequemeren

155752

Vergleichung und Kontrollierung näherer Einzelheiten am Schluß des Buches zusammengestellt.

Es liegt mir aber daran, auch an dieser Stelle noch besonders hervorzuheben, was sich im letzten Paragraphen des Buches näher ausgeführt findet, daß die hier entwickelte Theorie keineswegs den Anspruch erhebt, als vollkommen abgeschlossen zu gelten, wenn sie auch, wie ich glaube, einen gangbaren Weg eröffnet, um die Vorgänge der Energiestrahlung von dem nämlichen Gesichtspunkt aus zu überblicken wie die der Molekularbewegungen.

München, Ostern 1906.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Erster Abschnitt. Grundtatsachen und Definitionen 1

Erstes Kapitel. Allgemeines 1

Zweites Kapitel. Strahlung beim thermodynamischen Gleichgewicht. KIRCHHOFFsches Gesetz. Schwarze Strahlung. . 23

Zweiter Abschnitt. Folgerungen aus der Elektrodynamik und der Thermodynamik 49

Erstes Kapitel. MAXWELLscher Strahlungsdruck 49

Zweites Kapitel. STEFAN-BOLTZMANNsches Strahlungsgesetz . 58

Drittes Kapitel. WIENsches Verschiebungsgesetz 68

Viertes Kapitel. Strahlung von beliebiger spektraler Energieverteilung. Entropie und Temperatur monochromatischer Strahlung 86

Dritter Abschnitt. Emission und Absorption elektromagnetischer Wellen durch einen linearen Oszillator 100

Erstes Kapitel. Einleitung. Schwingungsgleichung eines linearen Oszillators 100

Zweites Kapitel. Ein Resonator unter der Einwirkung einer ebenen periodischen Welle 114

Drittes Kapitel. Ein Resonator unter der Einwirkung stationärer Wärmestrahlung. Entropie und Temperatur des Resonators 117

Vierter Abschnitt. Entropie und Wahrscheinlichkeit 129

Erstes Kapitel. Einleitung. Grundlegende Sätze und Definitionen 129

Zweites Kapitel. Entropie eines idealen einatomigen Gases . 140

Drittes Kapitel. Berechnung der Strahlungsentropie und Folgerungen daraus. Energieverteilungsgesetz. Elementarquanta 148

Fünfter Abschnitt. Irreversible Strahlungsvorgänge 180
Erstes Kapitel. Einleitung. Direkte Umkehrung eines Strahlungsvorgangs 180
Zweites Kapitel. Ein Oszillator in beliebigem Strahlungsfelde. Hypothese der natürlichen Strahlung 187
Drittes Kapitel. Erhaltung der Energie und Vermehrung der Entropie 203
Viertes Kapitel. Anwendung auf einen speziellen Fall. Schluß 214
Verzeichnis der Schriften des Verfassers über Wärmestrahlung . . 221

Erster Abschnitt.

Grundtatsachen und Definitionen.

Erstes Kapitel. Allgemeines.

§ 1. Wärme kann sich in einem ruhenden Medium auf zwei gänzlich verschiedene Arten fortpflanzen: durch Leitung und durch Strahlung. Die Wärmeleitung ist bedingt durch die Temperatur des Mediums, in welchem sie stattfindet, speziell durch die Ungleichmäßigkeit der räumlichen Temperaturverteilung, welche gemessen wird durch die Größe des Temperaturgefälles oder Temperaturgradienten. In Gebieten, wo die Temperatur des Mediums sich nicht mit dem Orte ändert, verschwindet jede Spur von Wärmeleitung.

Die Wärmestrahlung dagegen ist an sich gänzlich unabhängig von der Temperatur des Mediums, durch welches sie hindurchgeht. So kann man durch eine Sammellinse von Eis hindurch, die sich auf der konstanten Temperatur von 0° C. befindet, Sonnenstrahlen in einen Brennpunkt konzentrieren und zur Entzündung eines leicht brennbaren Körpers benutzen. Im allgemeinen ist die Wärmestrahlung ein viel komplizierterer Vorgang als die Wärmeleitung, weil der Strahlungszustand in einem bestimmten Augenblicke an einer bestimmten Stelle des Mediums sich nicht, wie der Wärmeleitungsstrom, durch einen einzigen Vektor, d. h. durch eine einzige gerichtete Größe, charakterisieren läßt. Vielmehr sind die Wärmestrahlen, welche in einem bestimmten Augenblicke das Medium an einem bestimmten Punkte durchkreuzen, von vornherein gänzlich unabhängig voneinander, und man darf den Strahlungszustand nicht eher als vollkommen bekannt ansehen, als bis die Intensität der Strahlung nach jeder einzelnen der unendlich vielen von einem Punkte ausgehenden

Richtungen des Raumes gegeben ist. Dabei zählen zwei gerade entgegengesetzte Richtungen doppelt, weil die Strahlung nach der einen Seite ganz unabhängig ist von der nach der entgegengesetzten Seite.

§ 2. Ohne vorläufig auf eine speziellere Theorie der Wärmestrahlung einzugehen, werden wir stets von dem durch die mannigfaltigsten Erfahrungen bewährten Satze Gebrauch machen, daß die Wärmestrahlen, rein physikalisch betrachtet, nichts anderes sind als Lichtstrahlen von entsprechender Wellenlänge, und werden die Bezeichnung „Wärmestrahlung" ganz allgemein für alle diejenigen physikalischen Vorgänge gebrauchen, welche zur Klasse der Lichtstrahlen gehören. Jeder Lichtstrahl ist demnach zugleich auch ein Wärmestrahl. Auch werden wir gelegentlich zur Abkürzung von der „Farbe" eines Wärmestrahls sprechen, um seine Wellenlänge oder seine Schwingungsdauer zu kennzeichnen. Daher wenden wir auch alle aus der Optik bekannten Erfahrungssätze auf die Wärmestrahlung an, vor allem die der Fortpflanzung, der Spiegelung (Reflexion) und der Brechung (Refraktion). Nur die Erscheinungen der Beugung (Diffraktion), wenigstens soweit sie sich in Gebieten von größeren Dimensionen abspielen, wollen wir wegen ihres komplizierteren Charakters nicht berücksichtigen, und sind daher genötigt, von vornherein eine besondere Einschränkung hinsichtlich der von uns zu betrachtenden Räume zu machen. Es soll nämlich im folgenden überall die Voraussetzung gelten, daß die linearen Dimensionen aller betrachteten Räume und auch die Krümmungsradien aller betrachteten Oberflächen groß sind gegen die Wellenlängen der betrachteten Strahlen. Dann können wir ohne merklichen Fehler von den Einflüssen der durch die Form der Grenzflächen bedingten Beugung ganz absehen und können überall die gewöhnlichen Gesetze der optischen Reflexion und Brechung zur Anwendung bringen. Hiermit führen wir also ein für allemal eine strenge Scheidung ein zwischen zwei Arten von Längen, die ganz getrennten Größenordnungen angehören: Körperdimensionen und Wellenlängen. Auch die Differentiale der Körperdimensionen: Längen-, Flächen- und Volumenelemente, nehmen wir immer noch groß an gegen die entsprechenden Potenzen der Wellenlängen. Je langwelligere Strahlen wir berücksichtigen wollen, um so größere Räume müssen wir daher

betrachten. Da wir aber in der Wahl unserer Räume im übrigen gar nicht beschränkt sind, so wird uns aus dieser Festsetzung keine weitere Schwierigkeit erwachsen.

§ 3. Wesentlicher noch als die Unterscheidung zwischen großen und kleinen Längen ist für die gesamte Theorie der Wärmestrahlung die Unterscheidung zwischen großen und kleinen Zeiten. Denn es liegt schon in der Definition der Intensität eines Wärmestrahles als derjenigen Energie, welche von dem Strahle in der Zeiteinheit geliefert wird, die Voraussetzung mit enthalten, daß die gewählte Zeiteinheit groß ist gegenüber der Zeitdauer einer Schwingung, wie sie der Farbe des Strahles entspricht. Sonst würde nämlich offenbar der Betrag der Strahlungsintensität im allgemeinen davon abhängig sein, bei welcher Phase der Schwingung die Messung der vom Strahl gelieferten Energie begonnen wird. Nur wenn die Zeiteinheit zufällig gerade eine ganze Anzahl Schwingungen umfassen würde, wäre die Intensität eines Strahles von konstanter Periode und konstanter Amplitude unabhängig von der anfänglichen Phase. Um dieser Unzuträglichkeit zu entgehen, sind wir genötigt ganz allgemein festzusetzen, daß die Zeiteinheit, oder besser gesagt: daß die Zeit, welche der Definition einer Strahlungsintensität zugrunde gelegt wird, mag sie auch als Differential auftreten, groß ist gegen die Schwingungszeit jeder der Farben, die in dem Strahle enthalten sind.

Diese Festsetzung führt zu einer wichtigen Folgerung für Strahlungen von veränderlicher Intensität. Wenn wir z. B. bei periodisch schwankenden Strahlungsintensitäten wie in der Akustik von „Schwebungen" der Intensität sprechen, so muß selbstverständlich die zur Definition der augenblicklichen Strahlungsintensität benötigte Zeit klein sein gegen die Periode einer Schwebung. Da sie nun aber nach dem vorigen groß sein muß gegen die Zeitdauer einer Schwingung, so folgt daraus, daß die Zeitperiode einer Schwebung immer groß ist gegen die Zeitperiode einer Schwingung. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so könnte man Schwingungen und Schwebungen gar nicht streng auseinanderhalten. Ebenso müssen im allgemeinen Fall, bei beliebig veränderlicher Strahlungsintensität, die Schwingungen immer sehr schnell erfolgen gegen die Intensitätsänderungen. Es versteht sich, daß in diesen Festsetzungen eine gewisse, und

zwar eine sehr wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit der zu betrachtenden Strahlungsvorgänge gelegen ist.

Eine ganz ähnliche und ebenso wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit macht man übrigens, wie gleich hier bemerkt sein möge, in der kinetischen Gastheorie, wenn man die in einem chemisch einfachen Gase stattfindenden Bewegungen einteilt in sichtbare, grobe, molare, und in unsichtbare, feine, molekulare. Denn da die Geschwindigkeit einer einzelnen Molekel eine durchaus einheitliche Größe ist, so kann diese Einteilung nur unter der Voraussetzung durchgeführt werden, daß die Geschwindigkeitskomponenten der in hinreichend kleinen Volumina enthaltenen Molekeln gewisse, von der Größe der Volumina unabhängige Mittelwerthe besitzen, was im allgemeinen keineswegs der Fall zu sein braucht. Wenn ein derartiger Mittelwert, einschließlich des Wertes Null, nicht existiert, so kann man gar nicht zwischen der sichtbaren und der Wärmebewegung des Gases unterscheiden.

Wenn wir uns nun der Frage zuwenden, nach welchen Gesetzen sich die Strahlungsvorgänge in irgend einem Körpersystem, das wir stets als ruhend annehmen wollen, abspielen, so können wir das Problem von zwei verschiedenen Seiten angreifen: wir können nämlich entweder eine bestimmte Stelle im Raume ins Auge fassen und nach den verschiedenen Strahlen fragen, welche im Laufe der Zeit diese Stelle durchkreuzen, oder wir können einen bestimmten Strahl ins Auge fassen und nach seiner Geschichte fragen, d. h. nach seiner Entstehung, seiner Fortpflanzung und seiner Vernichtung. Für die folgende Darstellung wird es bequemer sein, die letztere Behandlungsart voranzustellen und zunächst der Reihe nach die drei genannten Vorgänge einzeln zu betrachten.

§ 4. Emission. Der Akt der Entstehung eines Wärmestrahles wird allgemein als „Emission" bezeichnet. Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie erfolgt die Emission stets auf Kosten von anderweitiger Energie (Körperwärme, chemische Energie, elektrische Energie) und daraus geht hervor, daß nur substanzielle Partikel Wärmestrahlen emittieren können, nicht aber geometrische Räume oder Flächen. Man spricht zwar häufig in abkürzendem Sinne davon, daß die Oberfläche eines Körpers Wärme nach außen strahlt, aber diese Ausdrucksweise

hat nicht den Sinn, daß die Oberfläche Wärmestrahlen emittiert. Die Oberfläche eines Körpers emittiert niemals im eigentlichen Sinne, sondern sie läßt die Strahlen, welche aus dem Innern des Körpers kommend die Oberfläche treffen, teils nach außen hindurch, teils reflektiert sie dieselben in das Innere zurück, und je nachdem der hindurchgehende Bruchteil größer oder kleiner ist, scheint die Oberfläche stärker oder schwächer auszustrahlen.

Betrachten wir nun das Innere einer emittierenden physikalisch homogenen Substanz und greifen dort irgend ein nicht zu kleines Volumenelement von der Größe $d\tau$ heraus. Dann wird die von allen in dem Volumenelement befindlichen Partikeln zusammengenommen in der Zeiteinheit durch Strahlung emittierte Energie proportional $d\tau$ sein. Wollten wir versuchen, näher auf die Analyse des Vorgangs der Emission einzugehen und ihn in seine elementaren Bestandteile zu zerlegen, so würden wir jedenfalls sehr komplizierte Verhältnisse antreffen. Denn es wird sich hierbei um die Betrachtung von Räumen handeln, deren Dimensionen so klein sind, daß man die Substanz nicht mehr als homogen betrachten kann, sondern auf ihre atomistische Konstitution Rücksicht nehmen muß. Deshalb ist die endliche Größe, welche man erhält, wenn man die von dem Volumenelement $d\tau$ emittierte Strahlung durch $d\tau$ dividiert, nur als ein gewisser Mittelwert anzusehen. Wir werden aber trotzdem für gewöhnlich, was für die Rechnung viel bequemer ist, den Vorgang der Emission so behandeln können, als ob alle Punkte des Volumenelementes $d\tau$ sich gleichmäßig an der Emission beteiligten, so daß jeder Punkt innerhalb $d\tau$ die Spitze eines nach allen Richtungen ausgehenden Bündels von Strahlen bildet. Ein solches elementares Punktbündel repräsentiert natürlich keine endliche Energiemenge; denn eine solche wird immer nur von den Punkten eines endlichen Volumens emittiert.

Wir wollen ferner die Substanz als isotrop annehmen. Dann wird die Strahlung von dem Volumenelement $d\tau$ nach allen Richtungen des Raumes gleichmäßig emittiert, d. h. die von einem Punkte des Elements innerhalb eines beliebigen Kegels emittierte Strahlung ist proportional der Öffnung des Kegels, wie sie gemessen wird durch die Größe der Fläche, welche der Kegel aus der mit dem Radius 1 um seine Spitze als Mittel-

punkt beschriebenen Kugelfläche ausschneidet. Das gilt für beliebig große Kegelöffnungen. Nimmt man die Öffnung des Kegels unendlich klein, von der Größe $d\Omega$, so kann man von der „in einer bestimmten Richtung" emittierten Strahlung sprechen, doch immer nur in dem Sinne, daß zur Emission einer endlichen Energiemenge eine unendliche Anzahl von Richtungen gehören, die eine endliche Kegelöffnung miteinander bilden.

§ 5. Die emittierte Strahlung wird eine gewisse, von vornherein ganz beliebige spektrale Energieverteilung besitzen, d. h. die verschiedenen Farben werden in ihr mit ganz verschiedener Intensität vertreten sein. Zur Bezeichnung der Farbe eines Strahles bedient man sich in der Experimentalphysik gewöhnlich der Angabe der Wellenlänge λ, weil dieselbe am direktesten gemessen wird. Für die theoretische Behandlung ist es aber meist bequemer, statt dessen die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit ν zu benutzen; denn für die Farbe eines bestimmten Licht- oder Wärmestrahls ist weniger seine Wellenlänge, welche sich beim Übergang des Strahles in ein anderes Medium ändert, als vielmehr seine Schwingungszahl charakteristisch, welche dem Strahl in allen Medien, wenigstens soweit sie ruhen, ungeändert erhalten bleibt. Wir bezeichnen also künftig eine bestimmte Farbe durch den entsprechenden Wert von ν, und ein bestimmtes Farbenintervall durch die Grenzen des Intervalls ν und ν', wobei $\nu' > \nu$ sein möge. Die auf ein bestimmtes Farbenintervall entfallende Strahlung, dividiert durch die Größe des Intervalls $\nu' - \nu$, nennen wir die mittlere Strahlung innerhalb des Farbenintervalls von ν bis ν'. Nehmen wir, bei festgehaltenem ν, die Differenz $\nu' - \nu$ hinreichend klein, gleich $d\nu$, so wollen wir annehmen, daß sich der Betrag der mittleren Strahlung einem bestimmten, von der Größe des Intervalls $d\nu$ unabhängigen Grenzwert nähert, den wir kurz als die „Strahlung von der Schwingungszahl ν" bezeichnen. Zu einer endlichen Strahlung gehört dann offenbar immer ein endliches, wenn auch unter Umständen sehr kleines, Intervall von Schwingungszahlen.

Endlich haben wir noch auf den Polarisationszustand der emittierten Strahlung Rücksicht zu nehmen. Da wir das Medium als isotrop vorausgesetzt haben, so folgt, daß alle emittierten Strahlen unpolarisiert sind und daß daher jeder Strahl die

doppelte Intensität besitzt wie eine seiner geradlinig polarisierten Komponenten, die man z. B. erhält, wenn man den Strahl durch ein Nicolsches Prisma hindurchschickt.

§ 6. Alles Bisherige zusammengefaßt können wir die gesamte in der Zeit dt vom Volumenelement $d\tau$ in der Richtung des Elementarkegels $d\Omega$ im Schwingungsintervall von ν bis $\nu + d\nu$ emittierte Energie gleich setzen:

$$dt \cdot d\tau \cdot d\Omega \cdot d\nu \cdot 2\varepsilon_\nu. \tag{1}$$

Die endliche Größe ε_ν nennen wir den „Emissionskoeffizienten" des Mediums für die Schwingungszahl ν. Er ist eine gewisse positive Funktion von ν und entspricht einem geradlinig polarisierten Strahl von bestimmter Farbe und bestimmter Richtung. Für die gesamte Emission des Volumenelements $d\tau$ erhält man hieraus durch Integration über alle Richtungen und über alle Schwingungszahlen, da ε_ν von der Richtung unabhängig ist und da das Integral über alle Kegelöffnungen $d\Omega$ den Wert 4π besitzt:

$$dt \cdot d\tau \cdot 8\pi \int_0^\infty \varepsilon_\nu d\nu. \tag{2}$$

§ 7. Der Emissionskoeffizient ε hängt außer von der Schwingungszahl ν noch von dem Zustand der in dem Volumenelement $d\tau$ enthaltenen emittierenden Substanz ab, und zwar im allgemeinen in sehr verwickelter Weise, je nach den physikalisch-chemischen Vorgängen, welche sich in dem betreffenden Zeitelement in dem Raume abspielen. Doch gilt ganz allgemein der Erfahrungssatz, daß die Emission eines Körperelements nur abhängt von den Vorgängen innerhalb des Körperelements. (Theorie von Prevost.) Ein Körper A von 100° C. emittiert gegen einen ihm gegenüber befindlichen Körper B von 0° C. genau dieselbe Wärmestrahlung, wie gegen einen gleichgroßen und gleichgelegenen Körper B' von 1000° C., und wenn der Körper A von dem Körper B abgekühlt, von dem Körper B' aber erwärmt wird, so ist dies nur eine Folge des Umstandes, daß B schwächer, B' aber stärker emittiert als A.

Wir wollen nun weiter für das Folgende überall die vereinfachende Annahme einführen, daß die chemische Natur der emittierenden Substanz unveränderlich ist, und daß ihr physikalischer Zustand nur von einer einzigen Variabeln abhängt: der absoluten Temperatur T. Dann ergibt sich mit Notwendigkeit,

daß auch der Emissionskoeffizient ε außer von der Schwingungszahl ν und von der chemischen Natur des Mediums allein von der Temperatur T abhängig ist. Damit sind eine Reihe von Strahlungsvorgängen, die als Fluoreszenz, als Phosphoreszenz, als elektrisches oder chemisches Leuchten bezeichnet werden, und die von E. WIEDEMANN unter dem Namen „Lumineszenzphänomene" zusammengefaßt worden sind, von der Betrachtung ausgeschlossen. Wir haben es hier vielmehr nur mit reiner „Temperaturstrahlung" zu tun. Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie erfolgt bei der Temperaturstrahlung die Emission vollständig auf Kosten der Körperwärme und bedingt daher, wenn nicht anderweitig Energie zugeführt wird, eine Temperaturerniedrigung der emittierenden Substanz, welche durch den Betrag der emittierten Energie, sowie durch die Wärmekapazität der Substanz bestimmt ist.

§ 8. **Fortpflanzung.** Die Fortpflanzung der emittierten Strahlung im Innern des als homogen, isotrop und ruhend angenommenen Mediums erfolgt, da wir von Beugungserscheinungen ganz absehen (§ 2), geradlinig und nach allen Richtungen mit der nämlichen Geschwindigkeit; doch erleidet dabei im allgemeinen jeder Strahl während seiner Fortpflanzung eine Schwächung dadurch, daß beständig ein gewisser Teil seiner Energie aus seiner Richtung abgelenkt und nach allen Richtungen des Raumes zerstreut wird. Dieser Vorgang der „Zerstreuung", der also weder Erzeugung noch Vernichtung, sondern nur eine geänderte Verteilung der strahlenden Energie bedeutet, findet prinzipiell genommen in allen Medien statt, die sich vom absoluten Vakuum unterscheiden, auch in chemisch vollkommen reinen Substanzen,[1] und wird durch den Umstand bedingt, daß die Substanz eines Mediums nicht im absoluten Sinne homogen ist, sondern in den kleinsten Räumen Unstetigkeiten besitzt, die durch ihre atomistische Struktur bedingt werden. Fremde eingelagerte kleine Partikel, wie Staubteilchen, befördern den Einfluß der Zerstreuung, ohne jedoch ihren Charakter im wesentlichen zu ändern. Denn auch solche, mit fremden Bestandteilen durchsetzten, sogenannten „trüben" Medien, können sehr wohl als optisch homogen

[1] Vgl. z. B. LOBRY DE BRUYN und L. K. WOLFF, Rec. des Trav. Chim. des Pays-Bas **23**, p. 155, 1904.

betrachtet werden,[1] falls nur die Lineardimensionen der fremden Partikel, sowie die Abstände benachbarter Partikel, hinreichend klein sind gegen die Wellenlängen der betrachteten Strahlen. In optischer Beziehung besteht also zwischen chemisch reinen Substanzen und trüben Medien von der genannten Beschaffenheit kein prinzipieller Unterschied. Optisch leer in absolutem Sinne ist nur das reine Vakuum. Daher kann man auch jede chemisch homogene Substanz als ein durch eingelagerte Moleküle getrübtes Vakuum bezeichnen.

Ein typisches Beispiel für das Phänomen der Zerstreuung bietet das Verhalten des Sonnenlichts in der Atmosphäre. Wenn bei heiterem Himmel die Sonne im Zenit steht, erreicht nur etwa $^2/_3$ der direkten Sonnenstrahlung die Erdoberfläche; der Rest wird in der Atmosphäre aufgehalten, und zwar zum Teil absorbiert und in Luftwärme verwandelt, zum Teil aber zerstreut und in diffuses Himmelslicht verwandelt. Ob und inwieweit hierbei nur die Luftmoleküle selber oder auch die in der Atmosphäre suspendierten Partikel eine Rolle spielen, ist noch nicht mit voller Sicherheit entschieden.

Auf welchen physikalischen Vorgängen der Akt der Zerstreuung beruht: ob auf Reflexion, Beugung, Resonanzwirkung an den Molekülen oder Partikeln, können wir hier ganz dahingestellt sein lassen. Wir bringen nur zum Ausdruck, daß ein jeder im Innern eines Mediums fortschreitender Strahl auf der sehr kleinen Strecke s seiner Bahn durch Zerstreuung um den Bruchteil

$$\beta_\nu \cdot s \tag{3}$$

seiner Intensität geschwächt wird, und nennen die positive, von der Strahlungsintensität unabhängige Größe β_ν den „Zerstreuungskoeffizienten" des Mediums. Da das Medium als isotrop angenommen ist, so ist β_ν auch unabhängig von der Richtung und von der Polarisation des Strahles; dagegen hängt β_ν außer von der physikalischen und chemischen Beschaffenheit des Mediums in beträchtlichem Maße von der Schwingungszahl ab, wie schon durch den Index ν angedeutet ist. Für gewisse Werte von ν kann β_ν so große Beträge annehmen, daß von einer geradlinigen

[1] Wollte man das Wort „homogen" nur in absolutem Sinne gebrauchen, so dürfte man es auf keine einzige ponderable Substanz anwenden.

Fortpflanzung der Strahlung gar nicht mehr die Rede ist. Für andere Werte von ν kann β wieder so klein werden, daß die Zerstreuung gänzlich vernachlässigt werden kann. Wir werden der Allgemeinheit halber β als mittelgroß annehmen. In den wichtigsten Fällen nimmt β mit wachsendem ν zu, und zwar ziemlich stark, d. h. die Zerstreuung ist für Strahlen von kürzerer Wellenlänge beträchtlich größer.[1] Daher auch die blaue Farbe des diffusen Himmelslichts.

Die zerstreute Strahlungsenergie pflanzt sich von der Zerstreuungsstelle ebenso wie die emittierte Strahlung von der Emissionsstelle nach allen Seiten des Raumes, vorwärts, seitwärts und rückwärts, fort, doch nicht nach allen Richtungen mit gleicher Intensität. Auch ist sie nicht unpolarisiert, sondern es zeigen sich gewisse Vorzugsrichtungen, wobei natürlich die Richtung des ursprünglichen Strahles eine Rolle spielt. Doch brauchen wir diese Fragen hier nicht weiter zu verfolgen.

§ 9. Während das Phänomen der Zerstreuung eine stetig wirkende Modifikation der fortschreitenden Strahlung im Innern des Mediums bedeutet, tritt eine plötzliche Änderung sowohl der Intensität als auch der Richtung eines Strahles ein, wenn er an die Grenze des Mediums gelangt und dort auf die Oberfläche eines anderen Mediums trifft, dessen Substanz wir ebenfalls als homogen und isotrop voraussetzen wollen. In diesem Falle wird im allgemeinen ein merklicher Teil des Strahles reflektiert, der andere Teil durchgelassen. Reflexion und Brechung erfolgen entweder „regulär", indem ein einziger reflektierter und ein einziger gebrochener Strahl auftritt, gemäß dem einfachen Reflexionsgesetz und dem Snelliusschen Brechungsgesetz, oder sie erfolgen „diffus", indem die Strahlung von der Oberfläche sich nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Intensität in beide Medien hinein ausbreitet. Im ersten Falle nennen wir die Oberfläche des zweiten Mediums „glatt", im zweiten Falle „rauh". Von der diffusen Reflexion, die an einer rauhen Fläche eintritt, wohl zu unterscheiden ist die Reflexion eines Strahles an der glatten Oberfläche eines trüben Mediums. In beiden Fällen gelangt ein Teil des einfallenden Strahles als diffuse Strahlung in das erste Medium zurück. Aber im ersten Falle findet die

[1] Lord Rayleigh, Phil. Mag. **47**, p. 379, 1899.

Zerstreuung an der Oberfläche statt, im zweiten dagegen ausschließlich im Innern des zweiten Mediums, in mehr oder weniger tiefen Schichten desselben.

§ 10. Wenn eine glatte Fläche alle auf sie fallenden Strahlen vollständig reflektiert, wie das z. B. viele Metalloberflächen mit großer Annäherung tun, so nennen wir sie „spiegelnd". Wenn aber eine rauhe Fläche alle auf sie fallenden Strahlen vollständig und nach allen Richtungen gleichmäßig reflektiert, so nennen wir sie „weiß". Der entgegengesetzte Grenzfall, daß die Oberfläche eines Mediums alle auf sie fallenden Strahlen vollständig hindurchläßt, kommt bei glatten Flächen nicht vor, falls die beiden aneinander grenzenden Medien überhaupt optisch verschieden sind. Eine rauhe Fläche, welche die Eigenschaft besitzt, alle auffallenden Strahlen durchzulassen, keinen zu reflektieren, nennen wir „schwarz".

Außer von schwarzen Flächen sprechen wir auch von schwarzen Körpern, und nennen im Anschluß an G. Kirchhoff[1] einen Körper schwarz, wenn er die Eigenschaft besitzt, alle auf seine Oberfläche fallenden Strahlen ohne jede Reflexion in sich aufzunehmen und keinen derselben wieder herauszulassen. Damit ein Körper schwarz ist, müssen mithin drei verschiedene, voneinander ganz unabhängige Bedingungen erfüllt sein. Erstens muß der Körper eine schwarze Oberfläche besitzen, damit alle auffallenden Strahlen ohne Reflexion eindringen. Da die Eigenschaften einer Oberfläche im allgemeinen durch beide an sie grenzenden Substanzen beeinflußt werden, so zeigt diese Bedingung, daß die Eigenschaft eines Körpers, schwarz zu sein, nicht nur von seiner eigenen Natur abhängt, sondern auch von der Natur des angrenzenden Mediums. Ein Körper, welcher gegen Luft schwarz ist, braucht es gegen Glas nicht zu sein, und umgekehrt. Zweitens muß der schwarze Körper mindestens eine gewisse, je nach dem Grade seiner Absorptionsfähigkeit verschieden zu wählende Dicke besitzen, damit die von ihm aufgenommenen Strahlen nicht an irgend einer anderen Stelle

[1] G. Kirchhoff, Pogg. Ann. **109**, p. 275, 1860. Gesammelte Abhandlungen, J. A. Barth, Leipzig 1882, p. 573. Kirchhoff setzt bei der Definition eines schwarzen Körpers auch voraus, daß die Absorption der auffallenden Strahlen innerhalb einer Schicht von „unendlich kleiner Dicke" erfolgt, was wir hier nicht tun.

der Oberfläche wieder austreten können. Je kräftiger der Körper absorbiert, um so geringer darf seine Dicke sein; Körper mit verschwindend kleinem Absorptionsvermögen müssen dagegen unendlich dick angenommen werden, damit sie als schwarz gelten können. Endlich drittens muß der schwarze Körper einen verschwindend kleinen Zerstreuungskoeffizienten (§ 8) besitzen. Denn sonst würden die von ihm aufgenommenen Strahlen in seinem Innern teilweise zerstreut werden und wieder durch die Oberfläche hinausgelangen.[1]

§ 11. Alle in den beiden vorigen Paragraphen genannten Unterscheidungen und Definitionen beziehen sich zunächst immer nur auf Strahlen einer bestimmten Farbe. Eine Fläche z. B., die für eine gewisse Strahlengattung rauh ist, kann für eine andere Strahlengattung als glatt betrachtet werden. Im allgemeinen verliert eine Fläche für Strahlen von wachsender Wellenlänge immer mehr von ihrer Rauhigkeit, wie leicht zu verstehen. Da nun glatte nichtreflektierende Flächen nicht existieren (§ 10), so zeigen alle herstellbaren nahezu schwarzen Flächen (Lampenruß, Platinmoor) für Strahlen hinreichend großer Wellenlänge merkliche Reflexion.

§ 12. Absorption. Die Vernichtung eines Wärmestrahles erfolgt durch den Akt der „Absorption". Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie wird dabei die Energie der Wärmestrahlung in anderweitige Energie (Körperwärme, chemische Energie) verwandelt, und daraus folgt, daß nur substanzielle Partikel Wärmestrahlen absorbieren können, nicht aber Flächenelemente, wenn man auch manchmal der Kürze halber von absorbierenden Oberflächen spricht. Da wir uns schon oben (§ 7) ausdrücklich auf solche Substanzen beschränkt haben, deren Zustand nur von der Temperatur abhängt, so kommt die absorbierte Strahlungsenergie hier lediglich der Körperwärme zugute, dient also zur Temperaturerhöhung der Substanz, entsprechend ihrer spezifischen Wärme und ihrer Dichtigkeit.

Der Vorgang der Absorption äußert sich darin, daß jeder in dem betrachteten Medium fortschreitende Wärmestrahl auf

[1] Vgl. hierüber namentlich A. Schuster, Astrophysical Journal, **21**, p. 1, 1905, welcher besonders darauf hingewiesen hat, daß eine unendlich dicke Gasschicht mit schwarzer Oberfläche noch keineswegs ein schwarzer Körper zu sein braucht.

einer gewissen Strecke seiner Bahn um einen gewissen Bruchteil seiner Intensität geschwächt wird, und zwar ist für eine hinreichend kleine Strecke s dieser Bruchteil proportional der Länge der Strecke; wir setzen ihn also gleich:

$$\alpha_\nu \cdot s \tag{4}$$

und nennen α_ν den „Absorptionskoeffizienten" des Mediums für einen Strahl von der Schwingungszahl ν. Von der Intensität der Strahlung setzen wir den Absorptionskoeffizienten als unabhängig voraus; dagegen wird α_ν im allgemeinen, für inhomogene und anisotrope Medien, vom Orte, von der Richtung und außerdem auch von der Art der Polarisation des Strahles abhängen so z. B. beim Thurmalin). Da wir aber hier nur homogene und isotrope Substanzen betrachten, so dürfen wir α_ν für alle Stellen des Mediums und für alle Richtungen gleich groß und nur von der Schwingungszahl ν, von der Temperatur T und von der chemischen Beschaffenheit des Mediums abhängig annehmen.

Wenn α_ν nur für einen beschränkten Spektralbezirk von Null verschieden ist, so besitzt das Medium „auswählende" (selektive) Absorption. Für diejenigen Farben, für welche $\alpha_\nu = 0$, und auch der Zerstreuungskoeffizient $\beta_\nu = 0$, ist das Medium „vollkommen durchsichtig" oder „diatherman". Die Eigenschaften der selektiven Absorption und der Diathermansie können sich aber für ein bestimmtes Medium mit der Temperatur stark ändern. Im allgemeinen nehmen wir α_ν als von mittlerer Größe an, worin enthalten ist, daß die Absorption längs einer einzigen Wellenlänge sehr schwach ist. Denn die Strecke s enthält, obwohl klein, immer noch viele Wellenlängen (§ 2).

§ 13. Die im vorhergehenden in bezug auf die Emission, die Fortpflanzung und die Absorption eines Wärmestrahles angestellten Überlegungen genügen, um, falls die nötigen Konstanten bekannt sind, bei gegebenen Anfangs- und Grenzbedingungen den gesamten zeitlichen Verlauf eines Strahlungsvorgangs, einschließlich der durch ihn bewirkten Temperaturänderungen, in einem oder mehreren aneinander grenzenden Medien der betrachteten Art mathematisch zu verfolgen, — eine allerdings meist sehr verwickelte Aufgabe. Wir wollen aber, ehe wir zur Behandlung spezieller Fälle übergehen, die allgemeinen Strahlungsvorgänge zunächst noch von einer anderen

Seite betrachten, indem wir nämlich nicht mehr einen bestimmten Strahl, sondern eine bestimmte Stelle im Raume ins Auge fassen.

§ 14. Denken wir uns irgendwo im Innern eines beliebig durchstrahlten Mediums ein unendlich kleines Flächenelement $d\sigma$ herausgegriffen, so wird dieses Element in einem bestimmten Augenblick nach den verschiedensten Richtungen von Strahlen durchkreuzt werden, und die in dem Zeitelement dt durch das Element $d\sigma$ in einer bestimmten Richtung hindurchgestrahlte Energie wird proportional dt und $d\sigma$ sein, und außerdem proportional dem cos des Winkels ϑ, welchen die Normale von $d\sigma$ mit der Richtung der Strahlung bildet. Denn wenn $d\sigma$ hinreichend klein genommen wird, so können wir uns vorstellen, obgleich das den tatsächlichen Verhältnissen nur angenähert entsprechen wird, daß alle Punkte von $d\sigma$ in vollkommen gleicher Weise von der Strahlung betroffen werden. Dann muß die durch $d\sigma$ in einer bestimmten Richtung hindurchgestrahlte Energie proportional der Größe der Öffnung sein, welche das Element $d\sigma$ jener Strahlung darbietet, und diese Öfnung wird gemessen durch die Größe $d\sigma \cdot \cos\vartheta$. Wenn das Element $d\sigma$ gegen die Strahlung gedreht wird, so verschwindet für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die hindurchgestrahlte Energie vollständig, wie leicht einzusehen.

Von jedem Punkt des Flächenelementes $d\sigma$ aus pflanzt sich nun im allgemeinen ein Bündel von Strahlen nach allen Richtungen des Raumes fort, und zwar nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Intensität, und alle diese Strahlenbündel sind bis auf kleine Abweichungen von höherer Ordnung identisch. Doch kommt einem einzelnen dieser Punktbündel niemals eine endliche Energie zu, da eine endliche Energie nur durch eine endliche Fläche gestrahlt wird. Dies gilt auch für den Durchgang von Strahlen durch einen sogenannten Brennpunkt. Wenn z. B. Sonnenlicht durch eine Sammellinse in deren Brennebene konzentriert wird, so vereinigen sich die Sonnenstrahlen nicht etwa alle in einem einzigen Punkt, sondern jedes Bündel paralleler Strahlen liefert einen besonderen Brennpunkt, und alle diese Brennpunkte bilden zusammen eine Fläche, welche ein zwar kleines, aber doch endlich ausgedehntes Bild der Sonne darstellt. Eine endliche Energie geht nur durch einen endlichen Teil dieser Fläche.

§ 15. Betrachten wir nun für den allgemeinen Fall das Strahlenbündel, welches von einem Punkte des Flächenelementes $d\sigma$ als Spitze nach allen Richtungen des Raumes, zu beiden Seiten von $d\sigma$, sich fortpflanzt. Die einer gewissen, durch den schon oben benutzten Winkel ϑ (zwischen 0 und π) und durch das Azimut φ (zwischen 0 und 2π) bestimmten Richtung entsprechende Strahlungsintensität wird gemessen durch die Energie, welche sich innerhalb eines unendlich dünnen, durch die Werte der Winkel ϑ und $\vartheta + d\vartheta$, φ und $\varphi + d\varphi$, begrenzten Kegels fortpflanzt. Die Öffnung dieses Kegels ist:

$$d\Omega = \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi . \tag{5}$$

Auf diese Weise erhalten wir für die Energie, welche in der Zeit dt durch das Flächenelement $d\sigma$ in der Richtung des Kegels $d\Omega$ hindurchgestrahlt wird, den Ausdruck:

$$dt\, d\sigma \cos\vartheta\, d\Omega\, K = K \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\sigma\, dt. \tag{6}$$

Die endliche Größe K nennen wir die „spezifische Intensität" oder auch die „Helligkeit", $d\Omega$ den „Öffnungswinkel" des von einem Punkte des Elementes $d\sigma$ in der Richtung (ϑ, φ) ausgehenden Strahlenbündels. K ist eine positive Funktion des Ortes, der Zeit und der beiden Winkel ϑ und φ. Die spezifischen Strahlungsintensitäten nach verschiedenen Richtungen sind im allgemeinen gänzlich unabhängig voneinander. Setzt man z. B. in der Funktion K für ϑ den Wert $\pi - \vartheta$, und für φ den Wert $\pi + \varphi$, so erhält man die spezifische Strahlungsintensität in der gerade entgegengesetzten Richtung, eine im allgemeinen von der vorigen ganz verschiedene Größe.

Die Gesamtstrahlung durch das Flächenelement $d\sigma$ nach einer Seite, etwa derjenigen, für welche der Winkel ϑ ein spitzer ist, ergibt sich durch Integration über φ von 0 bis 2π, und über ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, K \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\sigma\, dt.$$

Ist die Strahlung nach allen Richtungen gleichmäßig, also K konstant, so folgt hieraus für die Gesamtstrahlung durch $d\sigma$ nach einer Seite:

$$\pi K\, d\sigma\, dt. \tag{7}$$

§ 16. Wenn man von der Strahlung in einer bestimmten Richtung (ϑ, φ) spricht, so ist dabei doch immer zu bedenken, daß eine endliche Energiestrahlung stets nur innerhalb eines Kegels von endlicher Öffnung stattfindet. Es gibt keine endliche Licht- und Wärmestrahlung, die sich in einer einzigen ganz bestimmten Richtung fortpflanzt, oder, was dasselbe ist: es gibt in der Natur kein absolut paralleles Licht, keine absolut ebenen Lichtwellen. Aus einem sogenannten parallelen Strahlenbündel ist eine endliche Strahlungsenergie nur dann zu gewinnen, wenn die Strahlen oder die Wellennormalen des Bündels innerhalb eines endlichen, wenn auch unter Umständen sehr schmalen Kegels divergieren.

§ 17. Die spezifische Intensität K der Energiestrahlung nach jeder Richtung zerfällt weiter in die Intensitäten der einzelnen, den verschiedenen Gebieten des Spektrums angehörigen Strahlen, die sich unabhängig voneinander fortpflanzen. Hierfür ist maßgebend die Strahlungsintensität innerhalb eines Intervalls von Schwingungszahlen, etwa von ν bis ν'. Ist das Intervall $\nu' - \nu$ hinreichend klein, gleich $d\nu$, so ist die Strahlungsintensität innerhalb des Intervalls proportional $d\nu$; die Strahlung heißt dann homogen oder monochromatisch.

Endlich ist bei einem Strahl von bestimmter Richtung, Intensität und Farbe noch die Art der Polarisation charakteristisch. Zerlegt man einen in bestimmter Richtung fortschreitenden Strahl von bestimmter Schwingungszahl ν und beliebigem Polarisationszustand in zwei geradlinig polarisierte Komponenten, deren Polarisationsebenen senkrecht aufeinander stehen, im übrigen aber beliebig sind, so ist die Summe der Intensitäten der beiden Komponenten stets gleich der Intensität des ganzen Strahles, unabhängig von der Orientierung des Ebenenpaares, und zwar kann die Größe der beiden Komponenten stets dargestellt werden durch zwei Ausdrücke von der Form:

$$(8) \quad \begin{cases} & \mathfrak{K}_\nu \cos^2\omega + \mathfrak{K}_\nu' \sin^2\omega \\ \text{und} & \mathfrak{K}_\nu \sin^2\omega + \mathfrak{K}_\nu' \cos^2\omega, \end{cases}$$

wobei ω das Azimut der Polarisationsebene einer Komponente bedeutet. Die Summe dieser beiden Ausdrücke, welche wir die „Komponenten der spezifischen Strahlungsintensität von der Schwingungszahl ν" nennen, ergibt in der Tat die Intensität

des ganzen Strahls $\mathfrak{K}_\nu + \mathfrak{K}_\nu'$ unabhängig von ω. $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu'$ repräsentieren zugleich den größten und den kleinsten Wert der Intensität, den eine Komponente überhaupt annehmen kann $\left(\text{für } \omega = 0 \text{ und } \omega = \frac{\pi}{2}\right)$. Daher nennen wir diese Werte die „Hauptwerte der Intensität" oder die „Hauptintensitäten", und die entsprechenden Polarisationsebenen die „Hauptpolarisationsebenen" des Strahles. Beide sind natürlich im allgemeinen mit der Zeit veränderlich. Somit können wir allgemein setzen:

$$K = \int_0^\infty d\nu\,(\mathfrak{K}_\nu + \mathfrak{K}_\nu'), \tag{9}$$

wobei die positiven Größen $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu'$, die beiden Hauptwerte der spezifischen Strahlungsintensität (Helligkeit) von der Schwingungszahl ν, außer von ν noch vom Ort, von der Zeit und von den Winkeln ϑ und φ abhängen. Durch Substitution in (6) erhält man hieraus für die Energie, welche in der Zeit dt durch das Flächenelement $d\sigma$ in der Richtung des Elementarkegels $d\Omega$ hindurchgestrahlt wird, den Ausdruck:

$$dt\,d\sigma\cos\vartheta\,d\Omega\int_0^\infty d\nu\,(\mathfrak{K}_\nu + \mathfrak{K}_\nu') \tag{10}$$

und für monochromatische geradlinig polarisierte Strahlung von der Helligkeit $\mathfrak{K}_\nu$:

$$dt\,d\sigma\cos\vartheta\,d\Omega\,\mathfrak{K}_\nu\,d\nu = dt\,d\sigma\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,\mathfrak{K}_\nu\,d\nu. \tag{11}$$

Für unpolarisierte Strahlen ist $\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}_\nu'$; folglich:

$$K = 2\int_0^\infty d\nu\,\mathfrak{K}_\nu \tag{12}$$

und die Energie eines monochromatischen Strahles von der Schwingungszahl ν wird:

$$2\,dt\,d\sigma\cos\vartheta\,d\Omega\,\mathfrak{K}_\nu\,d\nu = 2\,dt\,d\sigma\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,\mathfrak{K}_\nu\,d\nu. \tag{13}$$

Ist außerdem die Strahlung nach allen Richtungen gleichmäßig, so ergibt sich für die Gesamtstrahlung durch $d\sigma$ nach einer Seite aus (7) und (12):

$$2\pi\,d\sigma\,dt\int_0^\infty \mathfrak{K}_\nu\,d\nu. \tag{14}$$

§ 18. Da $\mathfrak{K}_\nu$ in der Natur nicht unendlich groß werden kann, so ist ein endlicher Wert von K nur dann möglich, wenn $\mathfrak{K}_\nu$ in einem endlichen Intervall von Schwingungszahlen ν von Null verschieden ist. Daher gibt es in der Natur keine in absolutem Sinne homogene oder monochromatische Licht- oder Wärmestrahlung. Eine endliche Strahlung umfaßt immer auch ein endliches, wenn auch unter Umständen sehr schmales Spektralgebiet. Hierin liegt ein prinzipieller Unterschied gegenüber den entsprechenden Erscheinungen in der Akustik, wo eine endliche Schallintensität auf eine ganz bestimmte Schwingungszahl treffen kann. Auf diesen Unterschied gründet sich u. a., wie wir später sehen werden, der Umstand, daß der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie nur für Licht- und Wärmestrahlen, nicht aber für Schallwellen Bedeutung hat.

§ 19. Wie man aus der Gleichung (9) ersieht, ist die Größe $\mathfrak{K}_\nu$, die Strahlungsintensität der Schwingungszahl ν, von anderer Dimension als die Größe K, die Strahlungsintensität des ganzen Spektrums. Ferner ist zu beachten, daß, wenn man die spektrale Zerlegung nicht nach Schwingungszahlen ν, sondern nach Wellenlängen λ vornimmt, die Strahlungsintensität E_λ der der Schwingungszahl ν entsprechenden Wellenlänge λ nicht einfach dadurch erhalten wird, daß man in dem Ausdruck von $\mathfrak{K}_\nu$ ν durch den entsprechenden Wert von λ ersetzt, also:

$$\nu = \frac{q}{\lambda}, \tag{15}$$

wenn q die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet. Denn es ist nicht E_λ gleich $\mathfrak{K}_\nu$, sondern es ist $E_\lambda\, d\lambda = \mathfrak{K}_\nu\, d\nu$, wenn sich $d\lambda$ und $d\nu$ auf dasselbe Spektralintervall beziehen. Nun ist, wenn $d\lambda$ und $d\nu$ beide positiv genommen werden:

$$d\nu = \frac{q \cdot d\lambda}{\lambda^2},$$

folglich durch Substitution:

$$E_\lambda = \frac{q\,\mathfrak{K}_\nu}{\lambda^2}. \tag{16}$$

Hieraus geht u. a. hervor, daß in einem bestimmten Spektrum die Maxima von E_λ und von $\mathfrak{K}_\nu$ an verschiedenen Stellen des Spektrums liegen!

§ 20. Wenn die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu'$ aller monochromatischen Strahlen nach allen Richtungen in allen Punkten

des Mediums gegeben sind, so ist damit der Strahlungszustand in allen Einzelheiten bestimmt, und es lassen sich sämtliche darauf bezügliche Fragen beantworten. Wir wollen dies noch an einigen speziellen Anwendungen zeigen. Fragen wir zunächst nach der Energiemenge, welche durch irgend ein Flächenelement $d\sigma$ einem beliebigen anderen Flächenelement $d\sigma'$ zugestrahlt wird. Die Entfernung r der beiden Flächenelemente sei groß gegen die Lineardimensionen jedes der Elemente, aber doch so klein, daß auf der Strecke r keine merkliche Absorption oder Zerstreuung der Strahlung stattfindet. Für diathermane Medien ist natürlich die letzte Bedingung gegenstandslos.

Nun gehen durch irgend einen bestimmten Punkt von $d\sigma$ Strahlen nach allen Punkten von $d\sigma'$. Diese Strahlen bilden einen Kegel, dessen Spitze in $d\sigma$ liegt und dessen Öffnung gegeben ist durch:

$$d\Omega = \frac{d\sigma' \cos(\nu', r)}{r^2},$$

wobei ν' die Normale von $d\sigma'$ bedeutet und der Winkel (ν', r) spitz zu nehmen ist. Dieser Wert von $d\Omega$ ist bis auf kleine Größen höherer Ordnung unabhängig von der speziellen Lage der Spitze des Kegels auf $d\sigma$.

Bezeichnen wir weiter mit ν die entsprechend gerichtete Normale von $d\sigma$, so ergibt sich aus der Gleichung (6), da hier $\vartheta = (\nu, r)$ zu setzen ist, die gesuchte Strahlungsenergie:

$$K \cdot \frac{d\sigma \cdot d\sigma' \cdot \cos(\nu, r) \cdot \cos(\nu', r)}{r^2} \cdot dt \tag{17}$$

und für monochromatische geradlinig polarisierte Strahlung von der Schwingungszahl ν nach Gleichung (11):

$$\mathfrak{K}_\nu \, d\nu \cdot \frac{d\sigma \, d\sigma' \cos(\nu, r) \cos(\nu', r)}{r^2} \cdot dt. \tag{18}$$

Das Größenverhältnis der Flächenelemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ zueinander ist dabei ganz beliebig, sie können von gleicher oder auch von verschiedener Größenordnung genommen werden, wenn nur r groß ist gegen die Lineardimensionen jedes der beiden Elemente. Nimmt man $d\sigma$ unendlich klein gegen $d\sigma'$, so divergieren die Strahlen von $d\sigma$ gegen $d\sigma'$; nimmt man aber $d\sigma$ unendlich groß gegen $d\sigma'$, so konvergieren sie von $d\sigma$ gegen $d\sigma'$.

§ 21. Da jeder Punkt von $d\sigma$ die Spitze eines nach $d\sigma'$ gehenden Strahlenkegels bildet, so besteht das ganze hier be-

trachtete, durch die Flächen $d\sigma$ und $d\sigma'$ bestimmte Strahlenbündel aus zweifach unendlich vielen Punktbündeln oder aus vierfach unendlich vielen Strahlen, welche alle in gleicher Weise für die Energiestrahlung in Betracht kommen. Ebensogut kann man sich das Strahlenbündel auch zusammengesetzt denken aus den Kegeln, welche von allen Punkten des Elementes $d\sigma$ ausgehend in je einem Punkte von $d\sigma'$ als Spitze konvergieren. Schneiden wir nun das ganze Strahlenbündel durch irgend eine Ebene in beliebiger Entfernung von den Elementen $d\sigma$ und $d\sigma'$, sei es zwischen ihnen oder außerhalb, so werden die Querschnitte der einzelnen Punktbündel im allgemeinen nicht dieselben sein, auch nicht annähernd, sondern sie werden sich teilweise überdecken, teilweise aber auseinanderfallen, so daß man von einem bestimmten Querschnitt des ganzen Strahlenbündels im Sinne einer gleichförmigen Bestrahlung desselben gar nicht reden kann Nur wenn die Schnittebene mit $d\sigma$ oder mit $d\sigma'$ zusammenfällt, hat das Strahlenbündel einen bestimmten Querschnitt. Diese beiden Flächen spielen also in ihm eine ausgezeichnete Rolle; wir wollen sie die beiden „Brennflächen" des Bündels nennen.

In dem schon oben erwähnten speziellen Falle, daß eine der beiden Brennflächen unendlich klein ist gegen die andere, nimmt das ganze Strahlenbündel den Charakter eines Punktbündels an, insofern seine Gestalt nahezu die eines Kegels wird, der seine Spitze in der gegen die andere unendlich kleinen Brennfläche hat, und man kann dann auch in bestimmtem Sinne von einem Querschnitt des Bündels an irgend einer Stelle im Raume sprechen. Ein solches, einem Kegel ähnlich sehendes Strahlenbündel nennen wir ein Elementarbündel, und die unendlich kleine Brennfläche die erste Brennfläche des Elementarbündels. Die Strahlung erfolgt entweder konvergierend, auf die erste Brennfläche zu, oder divergierend, von der ersten Brennfläche fort. Alle in einem Medium fortschreitenden Strahlenbündel lassen sich auffassen als zusammengesetzt aus solchen Elementarbündeln, und wir können daher unseren künftigen Betrachtungen stets lauter Elementarbündel zugrunde legen, was wegen ihrer einfacheren Beschaffenheit viel bequemer ist.

Die Begrenzung eines Elementarbündels bei gegebener erster Brennfläche $d\sigma$ kann, außer durch die zweite Brennfläche $d\sigma'$,

auch durch die Größe des Öffnungswinkels $d\Omega$ festgelegt werden, unter welchem $d\sigma'$ von $d\sigma$ aus gesehen wird; während dagegen bei einem beliebigen Bündel, d. h. wenn die beiden Brennflächen von gleicher Größenordnung sind, die zweite Brennfläche nicht allgemein durch den Öffnungswinkel $d\Omega$ ersetzt werden kann, ohne daß das Bündel seinen Charakter wesentlich ändert. Denn wenn statt $d\sigma'$ die Größe und Richtung von $d\Omega$ (konstant für alle Punkte von $d\sigma$) gegeben ist, so bilden die von $d\sigma$ ausgehenden Strahlen nicht mehr das vorige Bündel, sondern vielmehr ein Elementarbündel, dessen erste Brennfläche $d\sigma$ ist und dessen zweite Brennfläche im Unendlichen liegt.

§ 22. Da die Energiestrahlung sich in dem Medium mit endlicher Geschwindigkeit q fortpflanzt, so befindet sich in einem endlichen Raumteile desselben ein endlicher Betrag von Energie; wir sprechen daher von der „räumlichen Strahlungsdichte" als dem Verhältnis der gesamten in einem Volumenelement enthaltenen Strahlungsenergie zu der Größe des Volumenelements. Berechnen wir nun die räumliche Strahlungsdichte u an irgend einer Stelle des Mediums. Wenn wir an der betreffenden Stelle ein unendlich kleines Volumen v von beliebiger Form betrachten, so haben wir alle Strahlen zu berücksichtigen, welche das Volumenelement v durchkreuzen. Zu diesem Zwecke legen wir um irgend einen Punkt O des Volumenelements als Mittelpunkt eine Kugelfläche vom Radius r, der groß ist gegen die Lineardimensionen von v, aber doch so klein, daß auf der Strecke r keine merkliche Schwächung der Strahlung durch Absorption oder Zerstreuung stattfindet (Fig. 1). Jeder Strahl, der das Volumen v trifft, kommt von einem Punkte der Kugelfläche her. Wenn wir also zunächst die Strahlen ins Auge fassen, welche von den Punkten eines bestimmten unendlich kleinen Elements $d\sigma$ der Kugelfläche ausgehend das Volumen v treffen, so erhalten wir daraus durch Summation über alle Elemente der Kugelfläche sämtliche in Betracht kommenden Strahlen, und jeden nur einmal.

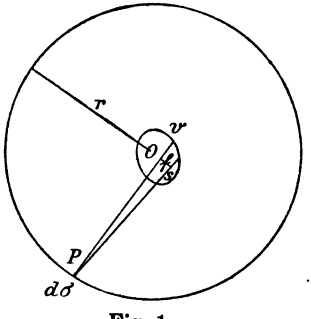


Fig. 1.

Berechnen wir daher zunächst den Beitrag, welchen das Flächenelement $d\sigma$ durch seine gegen das Volumen v gerichtete Strahlung zu der in v enthaltenen Strahlungsenergie liefert. Wir nehmen die Lineardimensionen von $d\sigma$ unendlich klein gegen die von v und betrachten den Strahlenkegel, der von einem in $d\sigma$ gelegenen Punkt P ausgehend das Volumen v trifft. Dieser Kegel zerfällt in unendlich viele unendlich dünne Elementarkegel, alle mit P als Spitze, deren jeder ein bestimmtes Stück von der Länge s aus dem Volumen v ausschneidet. Die Öffnung eines solchen Elementarkegels beträgt $\frac{f}{r^2}$, wenn f den senkrechten Querschnitt des Kegels in der Entfernung r von der Spitze bezeichnet. Nun braucht die Strahlung, um die Strecke s zurückzulegen, die Zeit:

$$\tau = \frac{s}{q}.$$

Während dieser Zeit τ gelangt nach der Gleichung (6), da $d\Omega$ hier gleich $\frac{f}{r^2}$ und ϑ gleich Null zu setzen ist, die Energiemenge:

(19) $$\tau\, d\sigma \frac{f}{r^2} K = \frac{fs}{r^2 q} \cdot K\, d\sigma$$

innerhalb des betrachteten Elementarkegels in das Volumen v hinein und verteilt sich hier auf den von dem Elementarkegel ausgeschnittenen Raum, dessen Volumen fs beträgt. Summiert man über alle von dem Flächenelement $d\sigma$ ausgehenden Elementarkegel, welche v treffen, so erhält man

$$\frac{K\, d\sigma}{r^2 q} \cdot \sum fs = \frac{K\, d\sigma}{r^2 q} \cdot v$$

für die ganze in dem Volumen v befindliche strahlende Energie, soweit sie von der Strahlung durch das Flächenelement $d\sigma$ herrührt. Um die gesamte in v enthaltene Strahlungsenergie zu erhalten, hat man schließlich noch über alle Elemente $d\sigma$ der Kugelfläche zu integrieren. Dies liefert, wenn man den Öffnungswinkel $\frac{d\sigma}{r^2}$ des Kegels, dessen Spitze in O liegt, und der das Element $d\sigma$ aus der Kugelfläche ausschneidet, mit $d\Omega$ bezeichnet:

$$\frac{v}{q} \cdot \int K\, d\Omega$$

und als gesuchte räumliche Strahlungsdichte, durch Division mit v:

$$u = \frac{1}{q} \cdot \int K \, d\Omega. \tag{20}$$

Da r hier ganz fortgefallen ist, so kann man unter K einfach die Strahlungsintensität in dem Punkte O selber verstehen. Bei der Integration ist zu beachten, daß K im allgemeinen von der Richtung (ϑ, φ) abhängt.

Für gleichmäßige Strahlung nach allen Richtungen ist K konstant, und man erhält:

$$u = \frac{4\pi K}{q}. \tag{21}$$

§ 23. Wie von der räumlichen Dichte der Gesamtstrahlung u, so spricht man auch von der räumlichen Dichte der Strahlung einer bestimmten Schwingungszahl u_ν, indem man die spektrale Zerlegung vornimmt:

$$u = \int_0^\infty u_\nu \, d\nu. \tag{22}$$

Dann ergibt sich durch Kombination der Gleichungen (20) und (9):

$$u_\nu = \frac{1}{q} \int (\mathfrak{K}_\nu + \mathfrak{K}_\nu') \, d\Omega \tag{23}$$

und hieraus für unpolarisierte und nach allen Richtungen gleichmäßige Strahlung:

$$u_\nu = \frac{8\pi \mathfrak{K}_\nu}{q}. \tag{24}$$

Zweites Kapitel. Strahlung beim thermodynamischen Gleichgewicht. Kirchhoffsches Gesetz. Schwarze Strahlung.

§ 24. Wir wollen jetzt die im vorigen Kapitel aufgestellten Sätze auf den speziellen Fall des thermodynamischen Gleichgewichts anwenden und stellen daher an die Spitze der folgenden Überlegungen die aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik fließende Folgerung: Ein System ruhender Körper von beliebiger Natur, Form und Lage, welches von einer festen, für Wärme undurchlässigen Hülle umschlossen ist, geht, bei beliebig gewähltem Anfangszustand, im Laufe der Zeit in einen

Dauerzustand über, bei welchem die Temperatur in allen Körpern des Systems die nämliche ist. Dies ist der thermodynamische Gleichgewichtszustand, in welchem die Entropie des Systems unter allen Werten, die sie vermöge der durch die Anfangsbedingungen gegebenen Gesamtenergie anzunehmen vermag, einen Maximalwert besitzt, von welchem aus daher keine weitere Vermehrung der Entropie mehr möglich ist.

Es kann in gewissen Fällen vorkommen, daß unter den gegebenen Bedingungen die Entropie nicht ein einziges, sondern mehrere verschiedene Maxima annehmen kann, von denen dann eins das absolute ist, während die übrigen nur relative Bedeutung haben.[1] In diesen Fällen stellt jeder Zustand, der einem Maximalwerte der Entropie entspricht, einen thermodynamischen Gleichgewichtszustand des Systems dar. Aber nur derjenige unter ihnen, der dem absolut größten Wert der Entropie entspricht, bezeichnet das absolut stabile Gleichgewicht. Die übrigen sind alle in gewissem Sinne labil, insofern eine geeignete, wenn auch minimale Störung des Gleichgewichts eine dauernde Veränderung des Systems in Richtung nach dem absolut stabilen Gleichgewicht hin veranlassen kann. Ein Beispiel hierfür bietet ein in ein festes Gefäß eingeschlossener Dampf im Zustand der Übersättigung, oder irgend eine explosible Substanz. Auch bei den Strahlungsvorgängen werden wir Beispiele solcher labilen Gleichgewichte antreffen (§ 52).

§ 25. Wir setzen nun wieder, wie im vorigen Kapitel, homogene isotrope Medien voraus, deren Zustand nur von der Temperatur abhängt, und fragen nach den Gesetzen, denen die Strahlungsvorgänge in ihnen gehorchen müssen, wenn sie mit der im vorigen Paragraph angeführten Folgerung aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik im Einklang sein sollen. Das Mittel zur Beantwortung dieser Frage gibt uns die Untersuchung des thermodynamischen Gleichgewichtszustandes eines oder mehrerer solcher Medien, unter Benutzung der im vorigen Kapitel aufgestellten Begriffe und Sätze.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall: einem einzigen Medium, welches nach allen Richtungen des Raumes sehr weit

[1] Vgl. z. B. M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik, Leipzig, Veit & Comp., 1905, § 165 und § 189 ff.

ausgedehnt ist, und, wie alle hier betrachteten Systeme, von einer festen, für Wärme undurchlässigen Hülle umschlossen wird. Das Medium besitze, wie wir vorläufig annehmen wollen, einen endlichen Absorptionskoeffizienten, einen endlichen Emissionskoeffizienten und einen endlichen Zerstreuungskoeffizienten.

Betrachten wir nun zunächst solche Stellen des Mediums, welche von der Oberfläche sehr weit entfernt liegen. Hier wird der Einfluß der Oberfläche jedenfalls verschwindend klein sein und wir werden wegen der Homogenität und Isotropie des Mediums schließen müssen, daß im thermodynamischen Gleichgewichtszustand die Wärmestrahlung überall und nach allen Richtungen von gleicher Beschaffenheit ist, oder daß $\mathfrak{K}_\nu$, die spezifische Strahlungsintensität eines geradlinig polarisierten Strahles von der Schwingungszahl ν (§ 17), unabhängig ist vom Azimut der Polarisation, von der Richtung des Strahles und vom Orte. Daher entspricht auch jedem von einem Flächenelement $d\sigma$ ausgehenden, innerhalb eines Elementarkegels $d\Omega$ divergierenden Strahlenbündel ein genau gleiches und entgegengesetzt gerichtetes innerhalb des nämlichen Elementarkegels gegen das Flächenelement hin konvergierendes Bündel.

Nun erfordert die Bedingung des thermodynamischen Gleichgewichts, daß die Temperatur überall gleich und unveränderlich ist, daß also in jedem Volumenelement des Mediums während einer beliebigen Zeit ebensoviel strahlende Wärme absorbiert wie emittiert wird. Denn da wegen der Gleichmäßigkeit der Temperatur keinerlei Wärmeleitung stattfindet, wird die Körperwärme lediglich durch die Wärmestrahlung beeinflußt. Das Phänomen der Zerstreuung spielt bei dieser Bedingung keine Rolle; denn die Zerstreuung betrifft nur eine Richtungsänderung der gestrahlten Energie, nicht aber Erzeugung oder Vernichtung derselben. Wir berechnen daher die in der Zeit dt von einem Volumenelement v emittierte und absorbierte Energie.

Die emittierte Energie beträgt nach Gleichung (2):

$$dt \cdot v \cdot 8\pi \int_0^\infty \varepsilon_\nu \, d\nu ,$$

wobei der Emissionskoeffizient ε_ν des Mediums außer von seiner chemischen Natur nur von der Schwingungszahl ν und von der Temperatur abhängt.

§ 26. Zur Berechnung der absorbierten Energie bedienen wir uns der nämlichen Betrachtung, wie die, welche durch die Fig. 1 (§ 22) illustriert wurde, und behalten auch die dortigen Bezeichnungen bei. Die von dem Volumenelement v in der Zeit dt absorbierte Energiestrahlung ergibt sich, wenn wir die Intensitäten aller das Element v durchkreuzenden Strahlen betrachten und von jedem dieser Strahlen den in v absorbierten Bruchteil berücksichtigen. Nun besitzt der von $d\sigma$ ausgehende, aus dem Volumen v den Teil fs ausschneidende Elementarstrahlenkegel nach (19) die Intensität (Energiestrahlung in der Zeiteinheit)

$$d\sigma \cdot \frac{f}{r^2} \cdot K$$

oder in spektraler Zerlegung nach (12):

$$2\,d\sigma \cdot \frac{f}{r^2} \cdot \int_0^\infty \mathfrak{K}_\nu \, d\nu .$$

Die Intensität eines monochromatischen Strahles ist daher:

$$2\,d\sigma \cdot \frac{f}{r^2} \cdot \mathfrak{K}_\nu \, d\nu .$$

Der Betrag der auf der Strecke s in der Zeit dt absorbierten Energie dieses Strahles ist daher nach (4):

$$dt \cdot \alpha_\nu s \cdot 2\,d\sigma \frac{f}{r^2} \mathfrak{K}_\nu \, d\nu$$

und die ganze aus dem Elementarstrahlenkegel absorbierte Energie beträgt, durch Integration über alle Schwingungszahlen:

$$dt \cdot 2\,d\sigma \frac{fs}{r^2} \int_0^\infty \alpha_\nu \, \mathfrak{K}_\nu \, d\nu .$$

Summiert man diesen Ausdruck erstens über die verschiedenen Querschnitte f der von $d\sigma$ ausgehenden, das Volumen v treffenden Elementarstrahlenkegel, wobei zu beachten, daß $\sum fs = v$, und zweitens über alle Elemente $d\sigma$ der Kugelfläche vom Radius r, wobei $\int \frac{d\sigma}{r^2} = 4\pi$, so erhält man als Ausdruck für die gesamte in der Zeit dt vom Volumenelement v absorbierte strahlende Energie:

$$dt \cdot v \cdot 8\pi \int_0^\infty \alpha_\nu \, \mathfrak{K}_\nu \, d\nu \tag{25}$$

und durch Gleichsetzen mit der emittierten Energie:

$$\int_0^\infty \varepsilon_\nu \, d\nu = \int_0^\infty \alpha_\nu \, \mathfrak{K}_\nu \, d\nu .$$

Diese Beziehung läßt sich noch spektral zerlegen. Denn die Gleichheit der emittierten und der absorbierten Energie beim thermodynamischen Gleichgewicht gilt nicht nur für die Gesamtstrahlung des ganzen Spektrums, sondern auch, wie sich leicht einsehen läßt, für jede monochromatische Strahlung. Da nämlich die Größen ε_ν, α_ν und $\mathfrak{K}_\nu$ unabhängig vom Orte sind, so würde, wenn für eine einzelne Farbe die absorbierte Energie der emittierten nicht gleich wäre, überall im ganzen Medium eine fortwährende Zunahme oder Abnahme der Energiestrahlung der betreffenden Farbe, auf Kosten anderer Farben, stattfinden, was der Bedingung widerspricht, daß $\mathfrak{K}_\nu$ für jede einzelne Schwingungszahl sich mit der Zeit nicht ändert. Es gilt also auch für jede Schwingungszahl die Beziehung:

$$\varepsilon_\nu = \alpha_\nu \mathfrak{K}_\nu \tag{26}$$

oder:

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu}, \tag{27}$$

d. h. im Innern eines im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen Mediums ist die spezifische Strahlungsintensität einer bestimmten Schwingungszahl gleich dem Quotienten aus dem Emissionskoeffizienten und dem Absorptionskoeffizienten des Mediums für diese Schwingungszahl.

§ 27. Da ε_ν und α_ν außer von der Natur des Mediums nur von der Temperatur und der Schwingungszahl ν abhängen, so ist mithin auch die Strahlungsintensität einer bestimmten Farbe beim thermodynamischen Gleichgewicht durch die Natur des Mediums und durch die Temperatur vollständig bestimmt. Eine Ausnahme bildet jedoch der Fall, daß $\alpha_\nu = 0$, d. h. daß das Medium die betreffende Farbe gar nicht absorbiert. Da $\mathfrak{K}_\nu$ nicht unendlich groß werden kann, so folgt zunächst, daß dann auch $\varepsilon_\nu = 0$, d. h. ein Medium emittiert keine Farbe, welche es nicht absorbiert. Ferner aber erkennt man, daß, wenn sowohl ε als auch α verschwinden, die Gleichung (26) durch jeden Wert von $\mathfrak{K}$ befriedigt wird. In einem für eine bestimmte

Farbe diathermanen Medium kann bei jeder beliebigen Strahlungsintensität der betreffenden Farbe thermodynamisches Gleichgewicht bestehen.

Hier haben wir schon ein Beispiel für die oben (§ 24) besprochenen Fälle, in denen bei gegebener Gesamtenergie eines von einer festen adiabatischen Hülle umschlossenen Systems mehrere Gleichgewichtszustände möglich sind, entsprechend mehreren relativen Maxima der Entropie. Denn da die Strahlungsintensität der betreffenden Farbe im thermodynamischen Gleichgewicht ganz unabhängig von der Temperatur des für sie diathermanen Mediums ist, so läßt sich die gegebene Gesamtenergie ganz beliebig auf die Strahlung jener Farbe und auf die Körperwärme verteilen, ohne daß das thermodynamische Gleichgewicht unmöglich wird. Unter allen diesen Verteilungen gibt es aber eine ganz bestimmte, dem absoluten Maximum der Entropie entsprechende, welche das absolut stabile Gleichgewicht bezeichnet und welche, im Gegensatz zu den übrigen, in gewissem Sinne labilen Zuständen, die Eigenschaft besitzt, durch keinerlei minimale Störung eine merkliche Änderung zu erleiden. In der Tat werden wir unten (§ 48) sehen, daß unter den unendlich vielen Werten, deren der Quotient $\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu}$ fähig ist, wenn Zähler und Nenner beide verschwinden, ein ausgezeichneter, in bestimmter Weise von der Natur des Mediums, der Schwingungszahl ν und der Temperatur abhängiger Wert existiert, den man als die stabile Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ in dem für die Schwingungszahl ν diathermanen Medium bei der betreffenden Temperatur zu bezeichnen hat.

Was hier von einem für eine bestimmte Strahlenart diathermanen Medium gesagt ist, das gilt ebenso vom absoluten Vakuum, als einem für sämtliche Strahlenarten diathermanen Medium, nur daß man hier nicht mehr von der Körperwärme und von der Temperatur des Mediums sprechen kann.

Fürs erste wollen wir aber von dem speziellen Falle der Diathermansie wieder ganz absehen und voraussetzen, daß alle betrachteten Medien einen endlichen Absorptionskoeffizienten besitzen.

§ 28. Widmen wir nun auch noch dem Vorgang der Zerstreuung beim thermodynamischen Gleichgewicht eine kurze

Betrachtung. Jeder Strahl, der das Volumenelement v trifft, erleidet dortselbst eine gewisse Schwächung seiner Intensität dadurch, daß ein gewisser Bruchteil seiner Energie nach anderen Richtungen abgelenkt wird. Der Betrag der gesamten in der Zeit dt vom Volumenelement v von allen Richtungen des Raumes durch Zerstreuung aufgefangenen Energiestrahlung berechnet sich auf Grund des Ausdruckes (3) genau in derselben Weise wie der der absorbierten Energiestrahlung in § 26, und wir erhalten daher für ihn, wie in (25):

$$dt \cdot v \cdot 8\pi \int_0^\infty \beta_\nu \mathfrak{K}_\nu \, d\nu. \tag{28}$$

Die Frage nach dem Verbleib dieser Energie läßt sich ebenfalls leicht beantworten. Denn wegen der Isotropie des Mediums muß die vom Volumenelement v ausgehende Strahlung der dortselbst zerstreuten Energie (28), ebenso wie die Einstrahlung, nach allen Richtungen gleichmäßig erfolgen. Dies ergibt für denjenigen Teil der vom Element v durch Zerstreuung aufgefangenen Energie, welcher durch den Öffnungswinkel $d\Omega$ wieder ausgestrahlt wird, durch Multiplikation mit $\frac{d\Omega}{4\pi}$:

$$2\, dt\, d\nu\, d\Omega \int_0^\infty \beta_\nu \mathfrak{K}_\nu \, d\nu$$

und für monochromatische geradlinig polarisierte Strahlung:

$$dt\, d\nu\, d\Omega \cdot \beta_\nu \mathfrak{K}_\nu \, d\nu. \tag{29}$$

Dabei ist allerdings wohl zu beachten, daß diese Gleichmäßigkeit der Ausstrahlung nach allen Richtungen nur für alle das Element v treffenden Strahlen zusammengenommen gilt; denn ein einzelner Strahl wird, auch in einem isotropen Medium, nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Intensität und Polarisation zerstreut (vgl. § 8 am Schluß).

Auf diese Weise ergibt sich, daß beim thermodynamischen Strahlungsgleichgewicht im Innern des Mediums der Vorgang der Zerstreuung im ganzen überhaupt keinen Effekt hervorbringt. Die von allen Seiten auf ein Volumenelement auffallende und dort wieder nach allen Seiten zerstreute Strahlung verhält sich genau ebenso, als ob sie ohne jede Modifikation durch das Volumenelement direkt hindurchgegangen wäre. Was

ein Strahl durch Zerstreuung an Energie verliert, das gewinnt er wieder durch Zerstreuung anderer Strahlen.

§ 29. Wir wollen nun die Strahlungsvorgänge im Innern eines sehr weit ausgedehnten, im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen homogenen isotropen Mediums noch von einem anderen Standpunkt aus betrachten, indem wir nicht mehr ein bestimmtes Volumenelement, sondern ein bestimmtes Strahlenbündel, und zwar ein Elementarbündel (§ 21) ins Auge fassen. Dasselbe sei charakterisiert durch die unendlich kleine Brennfläche $d\sigma$ beim Punkte O (Fig. 2), senkrecht zur Achse des Bündels, und durch den Öffnungswinkel $d\Omega$, und die Strahlung erfolge gegen die Brennfläche hin in der Richtung des Pfeiles. Wir betrachten ausschließlich nur solche Strahlen, welche diesem Bündel angehören.

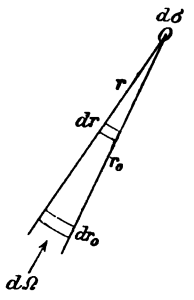


Fig. 2.

Die in der Zeiteinheit durch $d\sigma$ hindurchtretende Energie monochromatischer geradlinig polarisierter Strahlung ist nach (11), da hier $dt = 1$, und $\vartheta = 0$ zu setzen ist:

$$d\sigma \cdot d\Omega \cdot \mathfrak{K}_\nu \, d\nu \tag{30}$$

und dieser nämliche Wert gilt auch für jeden anderen Querschnitt des Bündels. Denn erstens ist $\mathfrak{K}_\nu \, d\nu$ überall gleich groß (§ 25), und zweitens besitzt auch das Produkt aus irgend einem senkrechten Querschnitt des Bündels und dem Öffnungswinkel, unter dem die Brennfläche $d\sigma$ von diesem Querschnitte aus gesehen wird, den konstanten Wert $d\sigma \cdot d\Omega$, da die Größe des Querschnittes sich mit der Entfernung von der Spitze O des Bündels in demselben Maße vergrößert, wie die jenes Öffnungswinkels sich verkleinert. Die Strahlung innerhalb des Bündels erfolgt also genau ebenso, als ob das Medium vollkommen diatherman wäre.

Andererseits modifiziert sich aber die Strahlung auf ihrer Bahn fortwährend durch die Einflüsse der Emission, der Absorption und der Zerstreuung. Wir wollen uns von dem Betrage dieser Wirkungen im einzelnen Rechenschaft geben.

§ 30. Ein Raumelement des Strahlenbündels, welches begrenzt ist durch zwei Querschnitte in den Entfernungen r_0

(beliebig groß) und $r_0 + dr_0$ von der Spitze O, und welches daher das Volumen $dr_0 \cdot r_0^2 d\Omega$ besitzt, emittiert gegen die bei O gelegene Brennfläche $d\sigma$ in der Zeiteinheit eine Energiemenge E monochromatischer geradlinig polarisierter Strahlung, welche man aus (1) erhält, wenn man darin setzt:

$$dt = 1, \qquad d\tau = dr_0 \cdot r_0^2 d\Omega, \qquad d\Omega = \frac{d\sigma}{r_0^2}$$

und den Zahlenfaktor 2 unterdrückt; also die Energie:

$$E = dr_0 \cdot d\Omega \cdot d\sigma \cdot \varepsilon_\nu d\nu. \tag{31}$$

Aber von dieser Energie E kommt nur ein Teilbetrag E_0 in O an, da auf jeder unendlich kleinen Wegstrecke s, welche sie bis O zurückzulegen hat, durch Absorption und Zerstreuung der Bruchteil $(\alpha_\nu + \beta_\nu)s$ verloren geht. Ist nämlich E_r derjenige Teil der Energie E, welcher in dem um die Strecke $r (< r_0)$ von O entfernten Querschnitt ankommt, so haben wir, für $s = dr$:

$$E_{r+dr} - E_r = E_r \cdot (\alpha_\nu + \beta_\nu) dr$$

oder:

$$\frac{dE_r}{dr} = E_r (\alpha_\nu + \beta_\nu).$$

Integriert:

$$E_r = E e^{(\alpha_\nu + \beta_\nu)(r - r_0)},$$

da für $r = r_0$ $E_r = E$ durch die Gleichung (31) gegeben ist.

Hieraus folgt für $r = 0$ die in O ankommende, von dem Raumelement bei r_0 emittierte Energie:

$$E_0 = E e^{-(\alpha_\nu + \beta_\nu) r_0} = dr_0 \cdot d\Omega \cdot d\sigma \, \varepsilon_\nu e^{-(\alpha_\nu + \beta_\nu) r_0} d\nu. \tag{32}$$

Alle Raumelemente des Strahlenbündels zusammen liefern also durch ihre Emission die in $d\sigma$ ankommende Energie:

$$d\Omega \cdot d\sigma \cdot d\nu \, \varepsilon_\nu \cdot \int_0^\infty dr_0 \cdot e^{-(\alpha_\nu + \beta_\nu) r_0} = d\Omega \cdot d\sigma \cdot \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu + \beta_\nu} d\nu. \tag{33}$$

§ 31. Wäre gar keine Zerstreuung der Strahlung wirksam, so müßte die gesamte in $d\sigma$ ankommende Energie sich zusammensetzen aus den von den einzelnen Raumelementen des Strahlenbündels emittierten Energiebeträgen, unter Berücksichtigung der Verluste, die unterwegs durch Absorption eintreten, und in der Tat sind für $\beta_\nu = 0$ die Ausdrücke (33) und (30) identisch, wie ein Vergleich mit (27) zeigt. Im allgemeinen ist aber (30) größer

als (33), weil die in $d\sigma$ ankommende Energie auch noch Strahlen enthält, welche gar nicht innerhalb des Strahlenbündels, sondern irgendwo anders emittiert, und später durch Zerstreuung in das betrachtete Strahlenbündel hineingeraten sind. In der Tat: die Raumelemente des Strahlenbündels zerstreuen nicht nur die innerhalb des Bündels fortschreitende Strahlung nach außen, sondern sie sammeln auch Strahlen, die von außen kommen, in das Bündel hinein, und zwar ergibt sich die von dem Raumelement bei r_0 auf diese Weise gesammelte Strahlung E', wenn man in dem Ausdruck (29) setzt:

$$dt = 1, \quad dv = dr_0 \cdot d\Omega r_0^2, \qquad d\Omega = \frac{d\sigma}{r_0^2},$$

$$E' = dr_0\, d\Omega\, d\sigma\, \beta_\nu\, \mathfrak{K}_\nu\, d\nu.$$

Diese Energie kommt zu der von dem Raumelement emittierten oben in (31) berechneten Energie E hinzu, so daß man für die gesamte in dem Raumelement bei r_0 in das Strahlenbündel neu eintretende Energie erhält:

$$E + E' = dr_0\, d\Omega\, d\sigma\, (\varepsilon_\nu + \beta_\nu\, \mathfrak{K}_\nu)\, d\nu.$$

Von dieser Energie kommt, analog (32), in O der Betrag an:

$$dr_0\, d\Omega\, d\sigma\, (\varepsilon_\nu + \beta_\nu\, \mathfrak{K}_\nu)\, d\nu \cdot e^{-r_0(\alpha_\nu + \beta_\nu)}$$

und alle Raumelemente des Strahlenbündels zusammen liefern durch Emission und Sammlung zerstreuter Strahlung unter Berücksichtigung der unterwegs durch Absorption und Zerstreuung eintretenden Verluste, die in $d\sigma$ ankommende Energie:

$$d\Omega\, d\sigma\, (\varepsilon_\nu + \beta_\nu\, \mathfrak{K}_\nu)\, d\nu \cdot \int_0^\infty dr_0 \cdot e^{-r_0(\alpha_\nu + \beta_\nu)} = d\Omega\, d\sigma \cdot \frac{\varepsilon_\nu + \beta_\nu\, \mathfrak{K}_\nu}{\alpha_\nu + \beta_\nu}\, d\nu,$$

welche nun in der Tat genau gleich dem Ausdruck (30) ist, wie man durch Vergleichung mit (26) erkennt.

§ 32. Die im vorhergehenden abgeleiteten Sätze über den Strahlungszustand beim thermodynamischen Gleichgewicht eines homogenen isotropen Mediums gelten zunächst nur für solche Stellen des Mediums, welche von der Oberfläche sehr weit entfernt liegen, weil nur für diese aus Symmetriegründen die Strahlung von vornherein als unabhängig vom Orte und von der Richtung angenommen werden darf. Indessen zeigt eine einfache Über-

legung, daß der in (27) berechnete, nur von der Temperatur und von der Natur des Mediums abhängige Wert von $\mathfrak{K}_\nu$ auch bis unmittelbar an die Oberfläche des Mediums den Betrag der Strahlungsintensität der betreffenden Schwingungszahl nach jeder beliebigen Richtung angibt. Denn beim thermodynamischen Gleichgewicht muß jeder Strahl genau die nämliche Intensität besitzen wie der gerade entgegengesetzte Strahl, weil sonst durch die Strahlung ein einseitiger Transport von Energie bedingt werden würde. Fassen wir also einen von der Oberfläche des Mediums herkommenden, in das Innere hinein gerichteten Strahl ins Auge, so muß derselbe die nämliche Intensität besitzen wie der gerade entgegengesetzte, aus dem Innern kommende Strahl, und daraus folgt ohne weiteres, daß der gesamte Strahlungszustand des Mediums an der Oberfläche der nämliche ist wie im Innern.

§ 33. Während also die von einem Element der Oberfläche ausgehende, nach dem Innern des Mediums gerichtete Strahlung in jeder Beziehung gleich ist der von irgend einem gleichgroßen und gleichgerichteten im Innern gelegenen Flächenelement ausgehenden Strahlung, so hat sie doch eine andere Vorgeschichte als diese, sie rührt nämlich, da die Oberfläche des Mediums als für Wärme undurchlässig vorausgesetzt ist, lediglich her von der Reflexion der aus dem Innern kommenden Strahlung an der Oberfläche. Im einzelnen kann dies in sehr verschiedener Weise geschehen, je nachdem die Oberfläche als glatt, also in diesem Falle als spiegelnd, oder als rauh, etwa als weiß (§ 10) vorausgesetzt ist. Im ersteren Falle entspricht jedem auf die Oberfläche auftreffenden Strahlenbündel ein ganz bestimmtes symmetrisch dazu gelegenes von der nämlichen Intensität, im zweiten Falle aber zersplittert sich jedes einzelne auftreffende Strahlenbündel in unendlich viele reflektierte Strahlenbündel von verschiedener Richtung, Intensität und Polarisation, doch immer so, daß die von allen Seiten mit gleicher Intensität $\mathfrak{K}_\nu$ auf ein Oberflächenelement auftreffenden Bündel in ihrer Gesamtheit wieder eine gleichmäßige von der Oberfläche in das Innere des Mediums gerichtete Strahlung von der nämlichen Helligkeit $\mathfrak{K}_\nu$ liefern.

§ 34. Nun bietet es nicht die geringste Schwierigkeit mehr, die im § 25 gemachte Voraussetzung aufzuheben, daß das

betrachtete Medium nach allen Richtungen des Raumes sehr weit ausgedehnt ist. Denn wenn in unserem Medium der thermodynamische Gleichgewichtszustand allenthalben eingetreten ist, so wird nach den Ergebnissen des letzten Paragraphen das Gleichgewicht in keiner Weise gestört, wenn man in dem Medium beliebig viele feste für Wärme undurchlässige, glatte oder rauhe, Flächen angebracht denkt. Hierdurch wird das ganze System in eine beliebig große Anzahl vollkommen abgeschlossener Einzelsysteme zerlegt, deren jedes so klein gewählt werden kann, als es die allgemeinen in § 2 ausgesprochenen Beschränkungen überhaupt gestatten. Daraus geht hervor, daß der in (27) gegebene Wert der spezifischen Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ auch für das thermodynamische Gleichgewicht einer in einem beliebig kleinen und beliebig geformten Raume eingeschlossenen Substanz Gültigkeit besitzt.

§ 35. Von dem aus einer einzigen homogenen isotropen Substanz bestehenden System gehen wir jetzt über zu einem aus zwei verschiedenen aneinander grenzenden homogenen isotropen Substanzen bestehenden System, das wiederum von einer festen für Wärme undurchlässigen Hülle begrenzt ist, und betrachten den Strahlungszustand beim thermodynamischen Gleichgewicht, zunächst wieder unter der Voraussetzung, daß beide Medien räumlich sehr weit ausgedehnt sind. Da das Gleichgewicht in Nichts gestört wird, wenn man die Trennungsfläche der beiden Substanzen sich einen Augenblick durch eine für Wärmestrahlung ganz undurchlässige Fläche ersetzt denkt, so gelten für eine jede der beiden Substanzen einzeln alle Sätze der letzten Paragraphen. Die spezifische Strahlungsintensität der Schwingungszahl ν, nach einer beliebigen Ebene polarisiert, im Innern der ersten Substanz (der oberen in Fig. 3) sei $\mathfrak{K}_\nu$, die im Innern der zweiten Substanz $\mathfrak{K}_\nu'$, wie wir überhaupt die auf die zweite Substanz bezüglichen Größen durch einen hinzugefügten Strich markieren wollen. Beide Größen $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu'$ hängen gemäß Gleichung (27) außer von der Temperatur und der Schwingungszahl ν nur von der Natur der beiden Substanzen ab, und zwar gelten diese Werte der Strahlungsintensität bis unmittelbar an die Grenzfläche der Substanzen, sind also ganz unabhängig von der Beschaffenheit dieser Fläche.

§ 36. Wir nehmen nun zunächst die Grenzfläche der beiden Medien als glatt (§ 9) an. Dann spaltet sich jeder aus dem ersten Medium kommende auf die Grenzfläche treffende Strahl in zwei Strahlen: den reflektierten und den durchgelassenen. Die Richtungen dieser beiden Strahlen variieren nach Maßgabe des Einfallswinkels und der Farbe des einfallenden Strahles, die Intensität außerdem nach Maßgabe seiner Polarisation. Bezeichnen wir mit ϱ (Reflexionskoeffizient) den Betrag der reflektierten, und infolgedessen mit $1 - \varrho$ den Betrag der durchgelassenen Strahlungsenergie im Verhältnis zur auffallenden Energie, so ist ϱ vom Einfallswinkel, von der Schwingungszahl und von der Polarisation des auffallenden Strahles abhängig. Entsprechendes gilt von ϱ', dem Reflexionskoeffizienten für einen aus dem zweiten Medium kommenden auf die Grenzfläche treffenden Strahl.

Nun ist die Energie der monochromatischen geradlinig polarisierten Strahlung von der Schwingungszahl ν von einem

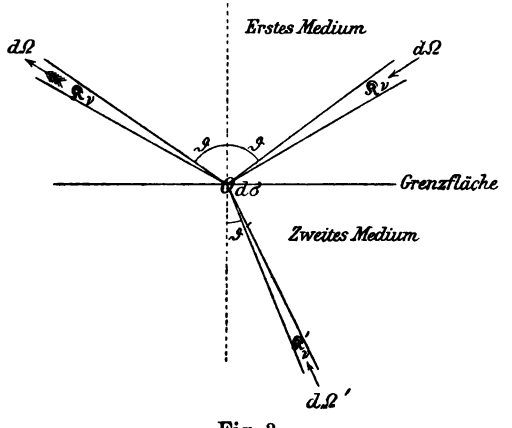


Fig. 3.

Element $d\sigma$ der Grenzfläche aus innerhalb des Elementarkegels $d\Omega$ in der Richtung nach dem ersten Medium (s. den gefiederten Pfeil oben links in Fig. 3) für die Zeit dt nach (11):

$$dt\, d\sigma \cos\vartheta\, d\Omega\, \mathfrak{K}_\nu\, d\nu, \tag{34}$$

wobei:

$$d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi. \tag{35}$$

Diese Energie wird geliefert durch die beiden Strahlen, welche

aus dem ersten bez. zweiten Medium kommend von dem Flächenelement $d\sigma$ in entsprechender Richtung reflektiert bez. durchgelassen werden (s. die ungefiederten Pfeile. Von dem Flächenelement $d\sigma$ ist nur ein Punkt O gezeichnet.) Der erstere Strahl verläuft, gemäß dem Reflexionsgesetz, innerhalb des symmetrisch gelegenen Elementarkegels $d\Omega$, der zweite innerhalb des Elementarkegels:

$$d\Omega' = \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi', \tag{36}$$

wobei nach dem Brechungsgesetz:

$$\varphi' = \varphi \quad \text{und} \quad \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} = \frac{q}{q'}. \tag{37}$$

Nehmen wir nun an, die Strahlung (34) sei entweder in der Einfallsebene oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, so gilt das Entsprechende für die beiden Strahlungen, aus deren Energien sie sich zusammensetzt, und zwar liefert die aus dem ersten Medium kommende, von $d\sigma$ reflektierte Strahlung den Beitrag:

$$\varrho \cdot dt \cdot d\sigma \cos\vartheta \cdot d\Omega\, \mathfrak{K}_\nu\, d\nu \tag{38}$$

und die aus dem zweiten Medium kommende, von $d\sigma$ durchgelassene Strahlung den Beitrag:

$$(1-\varrho') \cdot dt \cdot d\sigma \cos\vartheta' \cdot d\Omega'\, \mathfrak{K}_\nu'\, d\nu. \tag{39}$$

Die Größen dt, $d\sigma$, ν und $d\nu$ sind hier ohne Strich hingeschrieben, weil sie in beiden Medien die nämlichen Werte besitzen.

Addiert man die Ausdrücke (38) und (39) und setzt die Summe gleich dem Ausdruck (34), so ergibt sich:

$$\varrho \cos\vartheta \cdot d\Omega\, \mathfrak{K}_\nu + (1-\varrho') \cdot \cos\vartheta'\, d\Omega'\, \mathfrak{K}_\nu' = \cos\vartheta \cdot d\Omega\, \mathfrak{K}_\nu.$$

Nun ist nach (37)

$$\frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{q} = \frac{\cos\vartheta'\, d\vartheta'}{q'}$$

und weiter durch Berücksichtigung von (35) und (36):

$$d\Omega' \cos\vartheta' = \frac{d\Omega \cos\vartheta \cdot q'^2}{q^2}.$$

Folglich ergibt sich:

$$\varrho\, \mathfrak{K}_\nu + (1-\varrho')\frac{q'^2}{q^2}\mathfrak{K}_\nu' = \mathfrak{K}_\nu$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{K}_\nu}{\mathfrak{K}_\nu'} \cdot \frac{q^2}{q'^2} = \frac{1-\varrho'}{1-\varrho}.$$

§ 37. In der letzten Gleichung ist die Größe auf der linken Seite unabhängig vom Einfallswinkel ϑ und von der Art der Polarisation; folglich muß es auch die Größe auf der rechten Seite sein. Kennt man also den Wert dieser Größe für einen einzigen Einfallswinkel und eine bestimmte Art der Polarisation, so besitzt dieser Wert für alle Einfallswinkel und alle Polarisationen Gültigkeit. Nun ist in dem speziellen Falle, daß die Strahlen rechtwinklig zur Einfallsebene polarisiert sind und unter dem Polarisationswinkel auf die Grenzfläche auffallen, $\varrho = 0$ und $\varrho' = 0$. Dann wird der Ausdruck rechts gleich 1; also ist er allgemein gleich 1, und wir haben stets:

$$\varrho = \varrho' \tag{40}$$

und:

$$q^2 \mathfrak{K}_\nu = q'^2 \mathfrak{K}_\nu'. \tag{41}$$

§ 38. Die erste dieser beiden Beziehungen, welche besagt, daß der Reflexionskoeffizient der Grenzfläche nach beiden Seiten hin der nämliche ist, bildet den speziellen Ausdruck eines allgemeinen zuerst von Helmholtz[1] ausgesprochenen Reziprozitätssatzes, wonach der Intensitätsverlust, welchen ein Strahl von bestimmter Farbe und Polarisation auf seinem Wege durch irgend welche Medien infolge von Reflexion, Brechung, Absorption, Zerstreuung erleidet, genau gleich ist dem Intensitätsverlust, welchen ein Strahl von entsprechender Intensität, Farbe und Polarisation auf dem gerade entgegengesetzten Wege erleidet. Daraus folgt unmittelbar, daß die auf die Grenzfläche zweier Medien auffallende Strahlung stets nach beiden Seiten hin gleich gut hindurchgelassen bez. reflektiert wird, für jede Farbe, Richtung und Polarisation.

§ 39. Die zweite Beziehung (41) bringt die in den beiden Substanzen bestehenden Strahlungsintensitäten miteinander in Zusammenhang, sie besagt nämlich, daß beim thermodynamischen Gleichgewicht die spezifischen Strahlungsintensitäten einer bestimmten Schwingungszahl in beiden Medien

[1] H. v. Helmholtz, Handbuch der Physiologischen Optik. 1. Lieferung. Leipzig, Leop. Voss, 1856, p. 169. Vgl. auch Helmholtz' Vorlesungen über die Theorie der Wärme, herausgegeben von F. Richarz, Leipzig, J. A. Barth, 1903, p. 161. Die dort für besondere Fälle gemachten Einschränkungen des Reziprozitätssatzes sind hier gegenstandslos, da es sich hier nur um Temperaturstrahlung (§ 7) handelt.

sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten oder direkt wie die Quadrate der Brechungsexponenten.[1]

Substituiert man für $\mathfrak{K}_\nu$ seinen Wert aus (27), so kann man auch sagen: Die Größe:

$$q^2 \mathfrak{K}_\nu = q^2 \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} \tag{42}$$

hängt nicht ab von der Natur der Substanz, ist also eine universelle Funktion der Temperatur T und der Schwingungszahl ν.

Der hohe Wert dieses Satzes beruht offenbar darauf, daß er eine Eigenschaft der Strahlung angibt, die für alle Körper in der Natur gleichmäßig gilt, und die daher nur an einem einzigen ganz beliebig ausgewählten Körper bekannt zu sein braucht, um sogleich vollständig allgemein ausgesprochen werden zu können. Die hierdurch gebotene Möglichkeit werden wir später benutzen, um jene universelle Funktion wirklich zu berechnen, in § 161.

§ 40. Nun fassen wir den weiteren Fall ins Auge, daß die Grenzfläche der beiden Medien rauh ist. Dieser Fall ist insofern viel allgemeiner als der vorher betrachtete, als hier die Energie eines von einem Element der Grenzfläche in das Innere des ersten Mediums hinein gerichteten Strahlenbündels nicht mehr von zwei bestimmten, sondern von beliebig vielen Strahlenbündeln, die aus beiden Medien kommend die Grenzfläche treffen, geliefert wird. Es können hier im einzelnen sehr komplizierte Verhältnisse eintreten, je nach der Beschaffenheit der Grenzfläche, die überdies von Element zu Element beliebig variieren kann. Immer bleiben dabei natürlich nach § 35 die Werte der spezifischen Strahlungsintensitäten $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu'$ in beiden Medien nach allen Richtungen die nämlichen wie im Fall einer glatten Grenzfläche. Die Erfüllung dieser für das thermodynamische Gleichgewicht notwendigen Bedingung wird begreiflich durch den Helmholtzschen Reziprozitätssatz, wonach bei der stationären Strahlung jedem Strahl, der auf die Grenzfläche trifft und von dieser diffus nach beiden Seiten derselben zerstreut

[1] G. Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig, J. A. Barth, 1882, p. 594. R. Clausius, Pogg. Ann. **121**, p. 1, 1864.

wird, an demselben Orte ein gleich intensiver gerade entgegengesetzt gerichteter entspricht, der durch den umgekehrten Vorgang an derselben Stelle der Grenzfläche: die Sammlung diffus auftreffender Strahlung in eine bestimmte Richtung, zustande kommt, ebenso wie dies im Innern jedes der beiden Medien der Fall ist.

§ 41. Die erhaltenen Sätze wollen wir noch etwas weiter verallgemeinern. Zunächst kann, ebenso wie im § 34, die von uns gemachte Voraussetzung, daß die beiden Medien räumlich weit ausgedehnt sind, ohne weiteres aufgehoben werden, da man beliebig viele Trennungsflächen einführen kann, ohne daß das thermodynamische Gleichgewicht gestört wird. Dadurch sind wir dann auch in den Stand gesetzt, sogleich zu dem Falle beliebig vieler, beliebig großer und beliebig geformter Substanzen übergehen zu können. Denn wenn ein System von beliebig vielen sich gegenseitig berührenden Substanzen sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, so wird das Gleichgewicht in keiner Weise gestört, wenn man eine oder mehrere der Berührungsflächen zum Teil oder ganz als für Wärme undurchlässig voraussetzt. Hierdurch können wir immer den Fall beliebig vieler Substanzen zurückführen auf den zweier in eine für Wärme undurchlässige Hülle eingeschlossener Substanzen, und daher den Satz ganz allgemein aussprechen, daß beim thermodynamischen Gleichgewicht eines beliebigen Systems die spezifische Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ in jeder einzelnen Substanz durch die universelle Funktion (42) bestimmt wird.

§ 42. Wir betrachten nun ein in eine für Wärme undurchlässige Hülle eingeschlossenes System von n nebeneinander gelagerten emittierenden und absorbierenden Körpern beliebiger Größe und Form im Zustand des thermodynamischen Gleichgewichtes, und fassen wieder, wie in § 36, ein monochromatisches geradlinig polarisiertes Strahlenbündel ins Auge, welches von einem Element $d\sigma$ der Grenzfläche zweier Medien innerhalb des Elementarkegels $d\Omega$ in der Richtung nach dem ersten Medium fortschreitet (Fig. 3, s. den gefiederten Pfeil). Dann ist die von dem Bündel gelieferte Energie für die Zeiteinheit, wie in (34):

$$d\sigma \cos\vartheta \cdot d\Omega \, \mathfrak{K}_\nu \, d\nu = I. \tag{43}$$

Diese Strahlungsenergie I setzt sich zusammen aus einem

Teil, der mittels regulärer oder diffuser Reflexion an der Grenzfläche aus dem ersten Medium kommt, und aus einem anderen Teil, der durch die Grenzfläche hindurch aus dem zweiten Medium kommt. Wir wollen aber jetzt bei dieser Art Einteilung nicht stehen bleiben, sondern wollen die Einteilung darnach einrichten, in welchem der n Medien die einzelnen Teile der Strahlung I emittiert worden sind. Dieser Gesichtspunkt ist ein von dem vorigen wesentlich verschiedener. Denn die Strahlen, welche z. B. aus dem zweiten Medium durch die Grenzfläche hindurch in das betrachtete Bündel hineingelangen, brauchen keineswegs alle im zweiten Medium emittiert worden zu sein, sondern können unter Umständen einen langen, sehr komplizierten Weg durch verschiedene Medien zurückgelegt haben, in dessen Verlauf sie den Einflüssen der Brechung, Reflexion, Zerstreuung und teilweisen Absorption beliebig oft unterworfen waren. Ebenso brauchen die Strahlen des Bündels I, welche aus dem ersten Medium kommend an $d\sigma$ reflektiert worden sind, durchaus nicht alle im ersten Medium emittiert worden zu sein. Es kann auch vorkommen, daß ein Strahl, der in einem Medium emittiert ist, auf seinem Wege durch andere Medien hindurch wieder in das ursprüngliche Medium zurückgelangt und dort entweder absorbiert wird oder zum zweiten Male aus dem Medium austritt.

Wir wollen nun, unter Berücksichtigung aller dieser Möglichkeiten, den Teil von I, der von Volumenelementen des ersten Mediums emittiert worden ist, ganz gleichgültig, welche Wege seine einzelnen Bestandteile eingeschlagen haben, mit I_1, den, der von Volumenelementen des zweiten Mediums emittiert worden ist, mit I_2 bezeichnen usw. Dann muß sein:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n, \tag{44}$$

denn in irgend einem Körperelement muß jeder Bestandteil von I emittiert worden sein.

§ 43. Um nun näheres über die Herkunft und die Bahnen der einzelnen Strahlen zu erfahren, aus denen sich die Strahlungen I_1, I_2, ... I_n zusammensetzen, ist es am zweckmäßigsten, den umgekehrten Weg zu gehen und nach dem künftigen Schicksal desjenigen Strahlenbündels zu fragen, welches dem Bündel I gerade entgegengesetzt gerichtet ist, also vom ersten Medium

kommend innerhalb des Kegels $d\Omega$ auf das Oberflächenelement $d\sigma$ des zweiten Mediums trifft. Denn da jeder optische Weg auch in umgekehrter Richtung gangbar ist, so erhält man durch diese Betrachtung sämtliche Bahnen, auf denen Strahlen in das Bündel I hineingelangen können, so kompliziert sie auch im übrigen sein mögen. Ist J die Intensität dieses umgekehrten, auf die Grenzfläche zu gerichteten, ebenso polarisierten Bündels, so ist nach § 40:

$$J = I. \tag{45}$$

Die Strahlen des Bündels J werden an der Grenzfläche $d\sigma$ teils reflektiert, teils durchgelassen, regulär oder diffus, hierauf in beiden Medien teils absorbiert, teils zerstreut, teils wiederum reflektiert oder in andere Medien durchgelassen usw., je nach der Konfiguration des Systems. Schließlich aber wird das ganze Bündel J, nachdem es sich in viele einzelne Strahlen verzweigt hat, in den n Medien vollständig absorbiert werden. Bezeichnen wir denjenigen Teil von J, welcher schließlich im ersten Medium absorbiert wird, mit J_1, denjenigen, welcher schließlich im zweiten Medium absorbiert wird, mit J_2 usw., so ist mithin:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n.$$

Nun sind die Volumenelemente der n Medien, in denen die Absorption der Strahlen des Bündels J stattfindet, genau dieselben, wie die, in welchen die Emission der Strahlen stattfindet, aus denen sich das oben zuerst betrachtete Bündel I zusammensetzt. Denn nach dem Helmholtzschen Reziprozitätssatz kann keine merkliche Strahlung aus dem Bündel J in ein Volumenelement dringen, aus welchem keine merkliche Strahlung in das Bündel I hineingelangt, und umgekehrt.

Bedenkt man ferner, daß die Absorption eines jeden Volumenelements nach (42) proportional ist seiner Emission, und daß nach dem Helmholtzschen Reziprozitätssatz die Schwächung, welche die Energie eines Strahles auf irgend einem Wege erleidet, immer gleich ist derjenigen Schwächung, welche die Energie des Strahles auf dem umgekehrten Wege erleidet, so erhellt, daß die betrachteten Volumenelemente die Strahlen des Bündels J gerade in demselben Verhältnis absorbieren, wie sie durch ihre Emission zur Energie des entgegengesetzten Bündels I beitragen; und da überdies die Summe I der von allen Volumenelementen

durch Emission gelieferten Energien gleich ist der Summe J der von allen Elementen absorbierten Energien, so muß auch der von jedem einzelnen Element aus dem Bündel J absorbierte Energiebetrag gleich sein dem von demselben Element in das Bündel I emittierten Energiebetrag. Mit anderen Worten: Der Teil eines Strahlenbündels I, welcher aus einem bestimmten Volumen irgend eines Mediums emittiert worden ist, ist gleich demjenigen Teile des entgegengesetzt gerichteten Strahlenbündels $J(=I)$, welcher in demselben Volumen absorbiert wird.

Es sind also nicht nur die Summen I und J einander gleich, sondern auch ihre Bestandteile:

$$J_1 = I_1, \qquad J_2 = I_2, \ldots J_n = I_n. \tag{46}$$

§ 44. Die Größe I_2, d. h. die Intensität des vom zweiten Medium in das erste Medium emittierten Strahlenbündels, nennen wir nach G. KIRCHHOFF[1] das Emissionsvermögen E des zweiten Mediums, während wir als Absorptionsvermögen A desselben Mediums das Verhältnis von J_2 zu J bezeichnen, d. h. denjenigen Bruchteil des auf das zweite Medium fallenden Strahlenbündels, welcher in diesem Medium absorbiert wird. Also:

$$E = I_2 (\leqq I), \qquad A = \frac{J_2}{J} (\leqq 1). \tag{47}$$

Die Größen E und A hängen ab von der Natur beider Medien und der Temperatur, von der Schwingungszahl ν und von der Polarisationsrichtung der betrachteten Strahlung, ferner von der Beschaffenheit der Grenzfläche, von der Größe des Flächenelements $d\sigma$ und des Öffnungswinkels $d\Omega$, endlich von der geometrischen Ausdehnung und der Form der gesamten Oberfläche beider Medien, sowie von der Natur und Form sämtlicher anderer im System vorhandener Körper. Denn wenn z. B. ein aus dem ersten in das zweite Medium eingedrungener Strahl von letzterem hindurchgelassen wird, kann er möglicherweise irgendwo anders reflektiert werden, dadurch in das zweite Medium zurückgelangen und dort absorbiert werden.

Bei diesen Festsetzungen gilt gemäß den Gleichungen (46), (45) und (43) der KIRCHHOFFsche Satz:

[1] G. KIRCHHOFF, Gesammelte Abhandlungen, 1882, p. 574.

$$\frac{E}{A} = I = d\sigma \cos\vartheta \cdot d\Omega \cdot \mathfrak{K}_\nu \, d\nu, \tag{48}$$

d. h. das Verhältnis des Emissionsvermögens zum Absorptionsvermögen eines Körpers ist unabhängig von der Beschaffenheit des Körpers. Denn dies Verhältnis ist gleich der Intensität des im ersten Medium fortschreitenden Strahlenbündels, welche nach der Gleichung (27) von dem zweiten Medium gar nicht abhängt. Von der Beschaffenheit des ersten Mediums ist aber der Wert jenes Verhältnisses abhängig, insofern als nach (42) nicht die Größe $\mathfrak{K}_\nu$, sondern die Größe $q^2 \mathfrak{K}_\nu$ eine universelle Funktion der Temperatur und der Schwingungszahl ist. G. Kirchhoff hat den Beweis seines Satzes nur unter der Voraussetzung geführt, daß im ersten Medium weder Absorption noch Zerstreuung der Strahlung stattfindet. Dasselbe gilt von dem neueren sehr vereinfachten Beweise von E. Pringsheim.[1]

§ 45. Wenn speziell das zweite Medium ein schwarzer Körper ist (§ 10), so absorbiert es die ganze auffallende Strahlung. Daher ist dann $J_2 = J$, $A = 1$ und $E = I$, d. h. das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers ist von seiner Beschaffenheit unabhängig. Es ist größer als das Emissionsvermögen irgend eines anderen Körpers von derselben Temperatur, und direkt gleich der Intensität der Strahlung im angrenzenden Medium.

§ 46. Wir fügen hier, ohne näheren Beweis, noch einen allgemeinen Reziprozitätssatz an, der sich dem am Schluß des § 43 ausgesprochenen eng anschließt, und der folgendermaßen lautet: Beim thermodynamischen Gleichgewicht beliebiger emittierender und absorbierender Körper ist derjenige Teil der von einem Körper A emittierten Energie einer bestimmten Farbe, welcher von irgend einem anderen Körper B absorbiert wird, gleich demjenigen Teile der von B emittierten Energie derselben Farbe, welcher von A absorbiert wird. Bedenkt man, daß jeder emittierte Energiebetrag eine Verminderung der Körperwärme, jeder absorbierte Energiebetrag eine Vermehrung der

[1] E. Pringsheim, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 3, p. 81, 1901.

Körperwärme bedingt, so erhellt daraus, daß beim thermodynamischen Gleichgewicht je zwei beliebig herausgegriffene Körper (oder Körperelemente) vermittelst der Strahlung gegenseitig gleichviel Körperwärme austauschen. Dabei ist natürlich wohl zu unterscheiden zwischen der emittierten Strahlung und der gesamten Strahlung, die von einem Körper zu einem anderen hingelangt.

§ 47. Das für die Größe (42) gültige Gesetz läßt sich auch noch in einer anderen Form aussprechen, wenn man statt der spezifischen Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ die räumliche Dichte u_ν der monochromatischen Strahlung aus (24) einführt. Man erhält dann den Satz, daß bei der Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht die Größe:

(49) $$u_\nu \, q^3$$

eine für alle Substanzen identische Funktion der Temperatur T und der Schwingungszahl ν ist.[1] Eine anschaulichere Form gewinnt dieser Satz noch, wenn man bedenkt, daß auch die Größe

(50) $$u_\nu \, d\nu \cdot \frac{q^3}{\nu^3}$$

eine universelle Funktion von T, ν und $d\nu$ ist, und daß das Produkt $u_\nu \, d\nu$ nach (22) die räumliche Strahlungsdichte derjenigen Strahlung ist, deren Schwingungszahl zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt, während der Quotient $\frac{q}{\nu}$ die Wellenlänge eines Strahles von der Schwingungszahl ν in dem betrachteten Medium darstellt. Dann erhält der Satz folgende einfache Fassung: Beim thermodynamischen Gleichgewicht beliebiger Körper ist die in dem Kubus einer Wellenlänge enthaltene Energie der monochromatischen Strahlung für eine bestimmte Schwingungszahl in allen Körpern die nämliche.

§ 48. Wir wollen schließlich noch auf den bisher unberücksichtigt gebliebenen Fall der diathermanen Medien (§ 12) eingehen. Im § 27 sahen wir, daß in einem von einer adiabatischen Hülle umschlossenen Medium, welches für eine bestimmte

[1] Bei der Anwendung auf stark dispergierende Substanzen ist zu beachten, daß in diesem Satze die Identität der Größe q in (24) und der Größe q in (37) vorausgesetzt ist.

Farbe diatherman ist, bei jeder beliebigen Strahlungsintensität dieser Farbe thermodynamisches Gleichgewicht bestehen kann, daß aber unter allen möglichen Strahlungsintensitäten eine bestimmte, dem absoluten Maximum der Gesamtentropie des Systems entsprechende, existieren muß, welche das absolut stabile Strahlungsgleichgewicht bezeichnet. In der Tat nimmt in der Gleichung (27) die Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ für $\alpha_\nu = 0$ und $\varepsilon_\nu = 0$ den Wert $\frac{0}{0}$ an, und kann daher aus dieser Gleichung nicht berechnet werden. Aber man sieht auch sogleich weiter, daß die nötige Ergänzung zu dieser Unbestimmtheit geliefert wird von der Gleichung (41), welche besagt, daß beim thermodynamischen Gleichgewicht das Produkt $q^2\mathfrak{K}_\nu$ für alle Substanzen den nämlichen Wert besitzt. Daraus ergibt sich unmittelbar auch für jedes diathermane Medium ein bestimmter Wert von $\mathfrak{K}_\nu$, der hierdurch vor allen anderen Werten ausgezeichnet ist. Die physikalische Bedeutung dieses Wertes erkennt man ebenfalls unmittelbar aus der Betrachtung des Weges, auf dem jene Gleichung hergeleitet wurde: es ist diejenige Strahlungsintensität, welche in dem diathermanen Medium besteht, wenn es sich bei der Berührung mit einem beliebig absorbierenden und emittierenden Medium im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Auf das Volumen und die Form des zweiten Mediums kommt es dabei gar nicht an; insbesondere kann das Volumen beliebig klein genommen werden. Somit läßt sich folgender Satz aussprechen: Obwohl in einem diathermanen Medium von vornherein bei jeder beliebigen Strahlungsintensität thermodynamisches Gleichgewicht bestehen kann, so gibt es doch in jedem diathermanen Medium für eine bestimmte Schwingungszahl bei einer bestimmten Temperatur eine durch die universelle Funktion (42) bestimmte Strahlungsintensität, welche insofern die stabile zu nennen ist, als sie sich immer dann einstellt, wenn das Medium sich mit einer beliebigen emittierenden und absorbierenden Substanz im stationären Strahlungsaustausch befindet.

§ 49. Nach dem im § 45 ausgesprochenen Satze ist bei der stabilen Wärmestrahlung in einem diathermanen Medium die Intensität eines Strahlenbündels gleich dem Emissionsver-

mögen E eines an das Medium grenzenden schwarzen Körpers. Hierauf beruht die Möglichkeit, das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers zu messen, da es doch absolut schwarze Körper in der Natur nicht gibt.[1] Man stellt einen von stark emittierenden Wänden[2] begrenzten diathermanen Hohlraum her, und erhält die Wände auf einer bestimmten konstanten Temperatur T. Dann nimmt die Strahlung in dem Hohlraum zugleich mit dem Eintritt des thermodynamischen Gleichgewichtszustandes für jede Schwingungszahl ν die aus der universellen Funktion (42) durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit q des diathermanen Mediums bedingte Intensität an. Von jedem Flächenelement einer Wand geht dann eine Strahlung in den Hohlraum, die ebenso beschaffen ist, als ob die Wand ein schwarzer Körper von der Temperatur T wäre. Was den von den Wänden wirklich emittierten Strahlen im Vergleich mit der Emission eines schwarzen Körpers an Intensität noch fehlt, wird ersetzt durch solche Strahlen, die auf die Wand auffallen und dort zurückgeworfen werden. Ebenso wird jedes Flächenelement einer Wand von der nämlichen Strahlung getroffen.

Bohrt man nun in eine der Wände ein Loch von der Größe $d\sigma$, welches so klein ist, daß dadurch die Intensität der auf das Loch zu gerichteten Strahlung nicht geändert wird, so dringt durch das Loch nach außen, wo sich das nämliche diathermane Medium befinden möge wie im Innern, eine Strahlung, die genau die nämlichen Eigenschaften besitzt, als ob $d\sigma$ die Oberfläche eines schwarzen Körpers wäre, und diese Strahlung kann für jede Farbe zugleich mit der Temperatur T gemessen werden.

§ 50. Alle im vorstehenden für diathermane Medien abgeleiteten Sätze gelten zunächst für eine bestimmte Schwingungszahl, wobei zu bedenken ist, daß eine Substanz für eine Farbe diatherman, für eine andere adiatherman sein kann. Daher ist im thermodynamischen Gleichgewichtszustand eines rings von absolut reflektierenden Wänden umschlossenen Mediums die Strahlung für alle Farben, für welche das Medium einen endlichen Absorptionskoeffizienten besitzt, immer die der Temperatur

[1] W. Wien und O. Lummer, Wied. Ann. **56**, p. 451, 1895.

[2] Die Stärke der Emission beeinflußt nur die Zeit bis zur Herstellung der stationären Strahlung, nicht aber deren Charakter.

des Mediums entsprechende stabile, durch die Emission eines schwarzen Körpers dargestellte und daher auch kurz als „schwarz" bezeichnete[1]; dagegen ist die Strahlungsintensität für alle Farben, bezüglich derer das Medium diatherman ist, nur dann notwendig die stabile, schwarze, wenn das Medium sich mit eine absorbierenden Substanz in stationärem Strahlungsaustausch befindet.

Von Medien, die für alle Strahlenarten diatherman sind, existiert nur ein einziges: das absolute Vakuum, welches allerdings in der Natur nur annähernd herzustellen ist. Doch besitzen auch die Gase, z. B. die atmosphärische Luft, bei nicht zu großer Dichtigkeit und für nicht zu kurze Wellen, mit großer, in den meisten Fällen praktisch vollkommen hinreichender Annäherung die optischen Eigenschaften des Vakuums. Insofern dies der Fall ist, kann die Fortpflanzungsgeschwindigeit q für alle Schwingungszahlen als die gleiche:

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \tag{51}$$

angenommen werden.

§ 51. In einem von total reflektierenden Wänden umschlossenen Vakuum kann daher von vornherein jeder beliebige Strahlungszustand stationär sein. Sobald man aber in das Vakuum eine beliebig kleine Menge einer ponderablen Substanz hineinbringt, so stellt sich mit der Zeit ein stationärer Strahlungszustand her, in welchem die Strahlung einer jeden Farbe, die von der Substanz in merklichem Betrage absorbiert wird, die der Temperatur der Substanz entsprechende, durch die universelle Funktion (42) für $q = c$ bestimmte Intensität $\mathfrak{K}_\nu$ besitzt, während die Strahlungsintensität der übrigen Farben unbestimmt bleibt. Ist die eingebrachte Substanz für keine Farbe diatherman, z. B. ein beliebig kleines Stückchen Kohle, so besteht beim stationären Strahlungszustand im ganzen Vakuum für alle Farben die der Temperatur der Substanz entsprechende Intensität $\mathfrak{K}_\nu$ der schwarzen Strahlung. Die Größe $\mathfrak{K}_\nu$ als Funktion von ν betrachtet ergibt die spektrale Verteilung der schwarzen Strahlung im Vakuum oder das sogenannte normale Energiespektrum, welches ausschließlich von der Temperatur abhängt. Im Normalspektrum, als dem Spektrum der Emission eines schwarzen

[1] M. Thiesen, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, **2**, p. 65, 1900.

Körpers, ist die Strahlungsintensität einer jeden Farbe die größte, welche ein Körper bei der betreffenden Temperatur überhaupt emittieren kann.

§ 52. Man kann also eine ganz beliebige Strahlung, die anfangs in dem betrachteten evakuierten Hohlraume mit total reflektierenden Wänden herrscht, durch Einbringung eines winzigen Kohlestäubchens in schwarze Strahlung verwandeln. Charakteristisch für diesen Vorgang ist der Umstand, daß die Körperwärme des Kohlestäubchens beliebig klein sein kann gegen die Strahlungsenergie, die in dem beliebig groß zu nehmenden Hohlraume vorhanden ist, und daß daher in diesem Falle nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie die gesamte Strahlungsenergie auch bei der eintretenden Umwandlung wesentlich konstant bleibt, da die Änderungen der Körperwärme des Stäubchens selbst bei endlichen Temperaturänderungen desselben gar nicht in Betracht kommen. Das Kohlestäubchen spielt dann lediglich die Rolle einer auslösenden Wirkung, indem es den Anstoß dazu gibt, daß in der ursprünglich vorhandenen Strahlung die Intensitäten der verschieden gerichteten, verschieden polarisierten Strahlenbündel der verschiedenen Schwingungszahlen sich auf gegenseitige Kosten verändern, entsprechend dem Übergang des Systems aus einem minder stabilen in einen stabileren Strahlungszustand, oder aus einem Zustand kleinerer in einen Zustand größerer Entropie. Vom thermodynamischen Standpunkt aus ist dieser Vorgang ganz analog der Verwandlung, die in einem Quantum Knallgas durch einen minimalen Funken, oder die in einem Quantum übersättigten Dampfes durch ein winziges Flüssigkeitströpfchen hervorgerufen wird; denn auf die Zeit kommt es hier nicht an. In allen diesen Fällen ist die Größe der Störung eine minimale und steht in gar keiner Beziehung zu der Größe der an der Verwandlung beteiligten Energiemengen, so daß man bei der Anwendung der beiden Hauptsätze der Thermodynamik die Ursache der Gleichgewichtsstörung: das Kohlestäubchen, den Funken, das Tröpfchen gar nicht zu berücksichtigen braucht. Es handelt sich jedesmal um den Übergang eines Systems aus einem mehr oder minder labilen in einen stabileren Zustand, wobei nach dem ersten Hauptsatz die Energie des Systems konstant bleibt und nach dem zweiten Hauptsatz die Entropie des Systems zunimmt.

Zweiter Abschnitt.

Folgerungen aus der Elektrodynamik und der Thermodynamik.

Erstes Kapitel. Maxwellscher Strahlungsdruck.

§ 53. Während wir im vorigen Abschnitt für die Darstellung der Strahlungsvorgänge lediglich die aus der elementaren Optik bekannten, im § 2 zusammengefaßten Sätze benutzt haben, welche allen optischen Theorien gemeinsam sind, wollen wir von jetzt an die elektromagnetische Theorie des Lichtes benutzen, und beginnen damit, indem wir eine Folgerung ableiten, welche dieser Theorie eigentümlich ist. Wir wollen nämlich die Größe der mechanischen Kraft berechnen, welche ein im Vakuum fortschreitender Licht- oder Wärmestrahl beim Auftreffen auf eine ruhend gedachte spiegelnde (§ 10) Fläche ausübt.

Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst die allgemeinen MAXWELLschen Gleichungen für einen elektromagnetischen Vorgang im Vakuum auf. Sie lauten, wenn der Vektor $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke (Intensität des elektrischen Feldes) im elektrischen Maße, der Vektor $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke im magnetischen Maße bedeutet, in der abgekürzten Bezeichnung der Vektorrechnung:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathfrak{E}} &= c\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H} & \dot{\mathfrak{H}} &= -c\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E} \\ \mathrm{div}\,\mathfrak{E} &= 0 & \mathrm{div}\,\mathfrak{H} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Wer mit den hier benutzten Symbolen nicht vertraut ist, kann sich deren Bedeutung leicht aus den folgenden Gleichungen (53) rückwärts ergänzen.

§ 54. Um zu dem Fall einer ebenen beliebig gerichteten Welle überzugehen, setzen wir voraus, daß alle Zustandsgrößen außer von der Zeit t nur von einer einzigen der drei Koordinaten x', y', z' eines orthogonalen rechtshändigen Koordinaten-

systems abhängen, z. B. von x'. Dann reduzieren sich die Gleichungen (52) auf:

$$(53)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{E}_{x'}}{\partial t} = 0 & \dfrac{\partial \mathfrak{H}_{x'}}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathfrak{E}_{y'}}{\partial t} = -c\dfrac{\partial \mathfrak{H}_{z'}}{\partial x'} & \dfrac{\partial \mathfrak{H}_{y'}}{\partial t} = c\dfrac{\partial \mathfrak{E}_{z'}}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial \mathfrak{E}_{z'}}{\partial t} = c\dfrac{\partial \mathfrak{H}_{y'}}{\partial x'} & \dfrac{\partial \mathfrak{H}_{z'}}{\partial t} = -c\dfrac{\partial \mathfrak{E}_{y'}}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial \mathfrak{E}_{x'}}{\partial x'} = 0 & \dfrac{\partial \mathfrak{H}_{x'}}{\partial x'} = 0 \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich als allgemeinster Ausdruck für eine ebene, in der Richtung der positiven x'-Achse im Vakuum fortschreitende Welle:

$$(54)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_{x'} = 0 & \mathfrak{H}_{x'} = 0 \\ \mathfrak{E}_{y'} = f\left(t - \dfrac{x'}{c}\right) & \mathfrak{H}_{y'} = -g\left(t - \dfrac{x'}{c}\right) \\ \mathfrak{E}_{z'} = g\left(t - \dfrac{x'}{c}\right) & \mathfrak{H}_{z'} = f\left(t - \dfrac{x'}{c}\right), \end{cases}$$

wo f und g zwei beliebige Funktionen eines einzigen Arguments vorstellen.

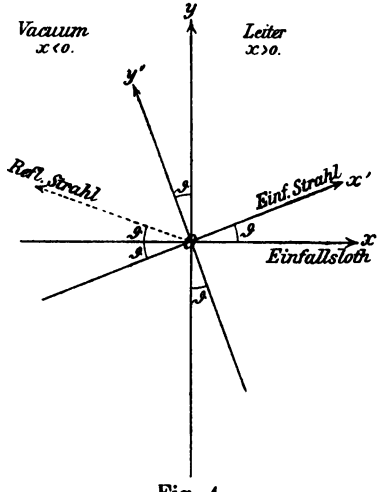


Fig. 4.

§ 55. Nun treffe diese Welle auf eine spiegelnde Fläche, z. B. auf die Oberfläche eines absoluten Leiters, d. h. einer Substanz (Metall) von unendlich großer Leitungsfähigkeit. In einem solchen Leiter bewirkt schon eine unendlich kleine elektrische Feldstärke einen endlichen Leitungsstrom; daher ist in ihr die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ stets und überall unendlich klein. Der Einfachheit halber setzen wir außerdem den Leiter als unmagnetisierbar voraus, d. h. wir nehmen die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ in ihm gleich der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ an, wie im Vakuum.

Legen wir die x-Achse des rechtshändigen Koordinatensystems (x, y, z) in die nach dem Innern des Leiters gerichtete Normale seiner Oberfläche, so ist die x-Achse das Einfallslot. Die $(x'y')$-Ebene legen wir in die Einfallsebene und machen sie zur Bildebene (Fig. 4). Ferner können wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, auch die y-Achse in die Bildebene legen, so daß die x-Achse mit der x'-Achse zusammenfällt (in der Figur vom Bilde zum Beschauer gerichtet). Der beiden Koordinatensystemen gemeinsame Anfangspunkt O liege in der Oberfläche. Ist endlich ϑ der Einfallswinkel, so sind die gestrichenen und die ungestrichenen Koordinaten durch die folgenden Gleichungen miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\vartheta - y' \sin\vartheta & \qquad x' &= x \cos\vartheta + y \sin\vartheta \\ y &= x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta & \qquad y' &= -x \sin\vartheta + y \cos\vartheta \\ z &= z' & \qquad z' &= z. \end{aligned}$$

Ganz dieselben Transformationsgleichungen gelten, wenn man die Koordinaten durch die Komponenten der elektrischen oder der magnetischen Feldstärke in beiden Koordinatensystemen ersetzt. Dadurch erhalten wir für die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Feldstärke der einfallenden Welle in bezug auf das ungestrichene Koordinatensystem nach (54) die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= -\sin\vartheta \cdot f & \qquad \mathfrak{H}_x &= \sin\vartheta \cdot g \\ \mathfrak{E}_y &= \cos\vartheta \cdot f & \qquad \mathfrak{H}_y &= -\cos\vartheta \cdot g \\ \mathfrak{E}_z &= g & \qquad \mathfrak{H}_z &= f, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

wo in die Funktionen f und g das Argument

$$t - \frac{x'}{c} = t - \frac{x\cos\vartheta + y\sin\vartheta}{c} \tag{56}$$

eingesetzt zu denken ist.

§ 56. In der Grenzfläche der beiden Medien ist $x = 0$. Für diesen Wert müssen also nach den allgemeinen elektromagnetischen Grenzbedingungen die in die Grenzfläche fallenden Komponenten der Feldstärken, d. h. hier die vier Größen $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ auf beiden Seiten der Grenzfläche einander gleich sein. Nun ist im Leiter nach der oben gemachten Voraussetzung die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ unendlich klein; folglich müssen $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ auch im Vakuum für $x = 0$ verschwinden. Diese Bedingung kann nur

erfüllt werden, wenn man im Vakuum außer der einfallenden noch eine reflektierte Welle annimmt, die sich der einfallenden Welle superponiert, und zwar in der Weise, daß die in die y- und z-Richtung fallenden elektrischen Feldkomponenten der beiden Wellen sich in allen Punkten der Grenzfläche in jedem Augenblick gegenseitig gerade aufheben. Hierdurch und durch die Bedingung, daß die reflektierte Welle eine ebene ist und sich nach rückwärts in das Innere des Vakuums hinein fortpflanzt, sind auch die übrigen vier Komponenten der reflektierten Welle vollkommen bestimmt; sie sind alle Funktionen des einen Arguments:

$$t - \frac{-x\cos\vartheta + y\sin\vartheta}{c}. \tag{57}$$

Die Ausführung der Rechnung ergibt als Komponenten des gesamten durch die Superposition der beiden Wellen im Vakuum gebildeten elektromagnetischen Feldes für die Punkte der Grenzfläche ($x = 0$) die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= -\sin\vartheta\cdot f - \sin\vartheta\cdot f = -2\sin\vartheta\cdot f\\
\mathfrak{E}_y &= \cos\vartheta\cdot f - \cos\vartheta\cdot f = 0\\
\mathfrak{E}_z &= g - g = 0\\
\mathfrak{H}_x &= \sin\vartheta\cdot g - \sin\vartheta\cdot g = 0\\
\mathfrak{H}_y &= -\cos\vartheta\cdot g - \cos\vartheta\cdot g = -2\cos\vartheta\cdot g\\
\mathfrak{H}_z &= f + f = 2f
\end{aligned}\right. \tag{58}$$

wo nach (56) und (57) in die Funktionen f und g überall das Argument:

$$t - \frac{y\sin\vartheta}{c}$$

eingesetzt zu denken ist.

Mit Hilfe dieser Werte ergibt sich dann auch die elektrische und die magnetische Feldstärke innerhalb des Leiters unmittelbar an der Grenzfläche $x = 0$:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= 0 \qquad & \mathfrak{H}_x &= 0\\
\mathfrak{E}_y &= 0 \qquad & \mathfrak{H}_y &= -2\cos\vartheta\cdot g\\
\mathfrak{E}_z &= 0 \qquad & \mathfrak{H}_z &= 2f
\end{aligned}\right. \tag{59}$$

wo wieder in die Funktionen f und g das Argument $t - \frac{y\sin\vartheta}{c}$ eingesetzt zu denken ist. Denn die Komponenten von $\mathfrak{E}$ ver-

schwinden im absoluten Leiter alle, und die Komponenten $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ sind an der Grenzfläche alle stetig: die letzten beiden als tangentielle Komponenten der Feldstärke, die erste als Normalkomponente der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}$ (§ 55), welche ebenfalls durch jede Grenzfläche stetig hindurchgeht.

Dagegen ist, wie man sieht, die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke: $\mathfrak{E}_x$ unstetig; ihr Sprung ergibt das Vorhandensein einer elektrischen Ladung an der Grenzfläche, deren Flächendichte nach Größe und Vorzeichen beträgt:

$$\frac{1}{4\pi} \cdot 2 \sin \vartheta \cdot f = \frac{1}{2\pi} \sin \vartheta \cdot f. \qquad (60)$$

Im Innern des Leiters, in endlicher Entfernung von der Grenzfläche, d. h. für $x > 0$, sind alle sechs Feldkomponenten unendlich klein. Daher fallen die für $x = 0$ endlichen Werte von $\mathfrak{H}_y$ und $\mathfrak{H}_z$ mit wachsendem x unendlich schnell gegen Null ab.

§ 57. Durch das im Vakuum vorhandene elektromagnetische Feld wird eine gewisse mechanische Kraft auf die Leitersubstanz ausgeübt, deren Komponente normal zur Oberfläche wir berechnen wollen. Dieselbe ist teils elektrischen, teils magnetischen Ursprungs. Betrachten wir zunächst die erstere: $\mathfrak{F}_e$. Da die an der Leiteroberfläche befindliche elektrische Ladung sich in einem elektrischen Felde befindet, so wirkt auf sie eine mechanische Kraft, die gleich ist dem Produkt der Ladung und der Feldstärke. Da aber die Feldstärke unstetig ist, nämlich auf der Seite des Vakuums: $-2 \sin \vartheta \cdot f$, auf der Seite des Leiters: 0, so erhält man die Größe der auf das Flächenelement $d\sigma$ der Oberfläche des Leiters wirkenden mechanischen Kraft $\mathfrak{F}_e$ nach einem bekannten Satz der Elektrostatik durch Multiplikation der in (60) berechneten elektrischen Ladung des Flächenelements mit dem arithmetischen Mittel der elektrischen Feldstärke auf beiden Seiten, mithin:

$$\mathfrak{F}_e = \frac{\sin \vartheta}{2\pi} f \, d\sigma \cdot (-\sin \vartheta \cdot f) = -\frac{\sin^2 \vartheta}{2\pi} f^2 \, d\sigma.$$

Diese Kraft wirkt in der Richtung nach dem Vakuum zu, äußert sich also als Zug.

§ 58. Jetzt berechnen wir die mechanische Kraft magnetischen Ursprungs: $\mathfrak{F}_m$. Im Innern der Leitersubstanz fließen

gewisse Leitungsströme, deren Intensität und Richtung durch den Vektor $\mathfrak{J}$ der Stromdichte:

$$\mathfrak{J} = \frac{c}{4\pi} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{H} \tag{61}$$

bestimmt ist. Nun wirkt auf jedes von einem Leitungsstrom durchflossene Raumelement $d\tau$ des Leiters eine mechanische Kraft, die gegeben ist durch das Vektorprodukt:

$$\frac{d\tau}{c} \cdot [\mathfrak{J}, \mathfrak{H}]. \tag{62}$$

Die Komponente dieser Kraft normal zur Leiteroberfläche ($x = 0$) ist daher:

$$\frac{d\tau}{c} \cdot (\mathfrak{J}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{J}_z \mathfrak{H}_y),$$

und wenn man die Werte von $\mathfrak{J}_y$ und $\mathfrak{J}_z$ aus (61) einsetzt:

$$\frac{d\tau}{4\pi} \cdot \left[\mathfrak{H}_z \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right) - \mathfrak{H}_y \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right)\right].$$

Die in diesem Ausdruck vorkommenden Differentialquotienten nach y und nach z sind nach der Bemerkung am Schluß von § 56 gegen die nach x verschwindend klein; daher reduziert er sich auf:

$$-\frac{d\tau}{4\pi} \cdot \left(\mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} + \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right).$$

Wir betrachten nun einen aus dem Leiter ausgeschnittenen, auf seiner Oberfläche senkrechten Zylinder mit dem Querschnitt $d\sigma$, der von $x = 0$ bis $x = \infty$ reicht. Die gesamte auf diesen Zylinder in der Richtung der x-Achse wirkende mechanische Kraft magnetischen Ursprungs ist dann, da $d\tau = d\sigma \cdot dx$:

$$\mathfrak{F}_m = -\frac{d\sigma}{4\pi} \int_0^\infty dx \cdot \left(\mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} + \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right)$$

und durch Integration, da für $x = \infty$ $\mathfrak{H}$ verschwindet:

$$\mathfrak{F}_m = \frac{d\sigma}{8\pi} (\mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2)_{x=0}$$

oder nach den Gleichungen (59):

$$\mathfrak{F}_m = \frac{d\sigma}{2\pi} \cdot (\cos^2 \vartheta \cdot g^2 + f^2).$$

Durch Addition von $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_m$ ergibt sich die ganze auf

den betrachteten Zylinder in der Richtung der x-Achse wirkende mechanische Kraft:

$$\mathfrak{F} = \frac{d\sigma}{2\pi} \cos^2\vartheta\,(f^2 + g^2), \tag{63}$$

welche sich als ein in normaler Richtung auf die Oberfläche des Leiters nach dem Innern desselben wirkender Druck äußert, der als „MAXWELLscher Strahlungsdruck" bezeichnet wird. Die Existenz und auch die Größe des Strahlungsdruckes wurde zuerst von P. LEBEDEW[1] durch subtile Messungen mit dem Radiometer als mit der Theorie übereinstimmend gefunden.

§ 59. Wir wollen den Strahlungsdruck in Beziehung bringen zu der auf das Oberflächenelement $d\sigma$ des Leiters im Zeitelement dt auffallenden Strahlungsenergie $I\,dt$. Dieselbe beträgt nach dem POYNTINGschen Energieströmungsgesetz:

$$I\,dt = \frac{c}{4\pi}(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y)\,d\sigma\,dt,$$

also nach (55):

$$I\,dt = \frac{c}{4\pi} \cos\vartheta\,(f^2 + g^2)\,d\sigma\,dt.$$

Durch Vergleich mit (63) ergibt sich:

$$\mathfrak{F} = \frac{2\cos\vartheta}{c} \cdot I. \tag{64}$$

Hieraus berechnen wir endlich den gesamten Druck p, d. h. diejenige mechanische Kraft, welche eine beliebige, aus dem Vakuum kommende, den Leiter treffende und von ihm vollständig reflektierte Strahlung auf die Oberflächeneinheit des Leiters in normaler Richtung ausübt. Die Energie, welche innerhalb des Elementarkegels:

$$d\Omega = \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$$

in der Zeit dt auf das Flächenelement $d\sigma$ gestrahlt wird, beträgt nach (6):

$$I\,dt = K\cos\vartheta \cdot d\Omega\,d\sigma\,dt,$$

wo K die spezifische Intensität der Strahlung in der Richtung von $d\Omega$ auf den Spiegel zu bedeutet. Dies in (64) eingesetzt und über $d\Omega$ integriert, ergibt für den Gesamtdruck aller auf die Oberfläche fallender und dort reflektierter Strahlenbündel:

[1] P. LEBEDEW, DRUDES Ann. **6**, p. 433, 1901. Vgl. ferner: E. F. NICHOLS und G. F. HULL, DRUDES Ann. **12**, p. 225, 1903.

(65) $$p = \frac{2}{c}\int K \cos^2\vartheta \, d\Omega,$$

wo die Integration in bezug auf φ von 0 bis 2π, in bezug auf ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ auszuführen ist.

Wenn speziell K von der Richtung unabhängig ist, wie bei der schwarzen Strahlung, so erhält man für den Druck derselben:

$$p = \frac{2K}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} d\vartheta \cos^2\vartheta \sin\vartheta = \frac{4\pi K}{3c}$$

oder, wenn statt K die räumliche Strahlungsdichte u aus (21) eingeführt wird:

(66) $$p = \frac{u}{3}.$$

Dieser Wert des Strahlungsdruckes gilt zunächst nur für den Fall, daß die Reflexion der Strahlung an der Oberfläche eines absoluten unmagnetisierbaren Leiters erfolgt, und wir werden ihn daher bei den thermodynamischen Deduktionen im nächsten Kapitel auch nur für diesen Fall benutzen. Indessen wird sich später (§ 66) zeigen, daß die Gleichung (66) den Druck der gleichmäßigen Strahlung auch gegen eine ganz beliebige vollständig reflektierende Fläche ergibt, gleichgültig ob sie regelmäßig oder diffus reflektiert.

§ 60. Angesichts der überaus einfachen und nahen Beziehung zwischen dem Strahlungsdrucke und der Strahlungsenergie könnte man die Frage aufwerfen, ob diese Beziehung wirklich eine spezielle Folgerung der elektromagnetischen Theorie ist, oder ob sie sich vielleicht auch auf allgemeinere energetische bezw. thermodynamische Überlegungen gründen läßt. Um diese Frage zu entscheiden, wollen wir denjenigen Strahlungsdruck berechnen, der sich aus der Newtonschen Emanationstheorie des Lichtes ergeben würde, welche Theorie ja mit dem Energieprinzip an sich wohl verträglich ist. Nach ihr ist die durch einen im Vakuum fortschreitenden Lichtstrahl einer Fläche zugestrahlte Energie gleich der lebendigen Kraft der auf die Fläche treffenden Lichtpartikel, die sich alle mit der konstanten Geschwindigkeit c bewegen. Die Abnahme der Intensität der Energiestrahlung mit der Entfernung erklärt sich dann einfach

aus der Abnahme der räumlichen Verteilungsdichte der Lichtpartikel.

Nennen wir also n die Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Lichtpartikel, m die Masse einer Partikel, so ist zunächst für ein paralleles Lichtbündel die Zahl der in der Zeiteinheit auf das Element $d\sigma$ einer spiegelnden Oberfläche unter dem Einfallswinkel ϑ treffenden Partikel:

$$n \cdot c \cdot \cos\vartheta \cdot d\sigma \tag{67}$$

und ihre lebendige Kraft:

$$I = n c \cos\vartheta \, d\sigma \cdot \frac{m c^2}{2} = n m \cos\vartheta \cdot \frac{c^3}{2} \cdot d\sigma . \tag{68}$$

Um andererseits den Normaldruck dieser Partikel auf die Oberfläche zu bestimmen, beachten wir, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit $c \cdot \cos\vartheta$ einer jeden Partikel bei der Reflexion in die entgegengesetzte verwandelt wird. Daher wird die Normalkomponente der Bewegungsgröße (Impulskoordinate) einer jeden Partikel bei der Reflexion um $-2mc \cdot \cos\vartheta$ geändert. Dies ergibt für alle betrachteten Partikel nach (67) die Änderung der Bewegungsgröße:

$$-2nm \cos^2\vartheta \cdot c^2 d\sigma . \tag{69}$$

Ist nun der spiegelnde Körper in der Richtung der Spiegelnormalen frei beweglich, und es wirkt außer dem Stoße der Lichtpartikel keine Kraft auf ihn, so wird er durch die Stöße in Bewegung gesetzt werden, und zwar nach dem Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung in der Weise, daß die Bewegungsgröße, welche er in einem gewissen Zeitintervall annimmt, gleich und entgegengesetzt ist der Änderung der Bewegungsgrößen aller in demselben Zeitintervall an ihm reflektierten Lichtpartikel. Läßt man aber noch eine besondere konstante Kraft von außen auf den Spiegel wirken, so kommt zu der Bewegungsgrößenänderung noch die von dieser Kraft gelieferte Bewegungsgröße hinzu, welche gleich ist dem Impuls der Kraft, d. h. dem Produkt der Kraft mal dem betrachteten Zeitintervall.

Daher wird der Spiegel dauernd in Ruhe bleiben, wenn die konstante von außen auf ihn wirkende Kraft so gewählt wird, daß ihr Impuls für irgend eine Zeit gerade gleich ist der in derselben Zeit eintretenden Änderung der Bewegungsgrößen der an dem Spiegel reflektierten Partikel, und daraus folgt, daß

die Kraft $\mathfrak{F}$ selbst, welche die Partikel durch ihren Anprall gegen das Flächenelement $d\sigma$ ausüben, gleich und entgegengesetzt ist der Änderung ihrer Bewegungsgröße für die Zeiteinheit, wie sie durch (69) ausgedrückt ist, nämlich:

$$\mathfrak{F} = 2\,n\,m\cos^2\vartheta \cdot c^2\,d\sigma$$

und mit Benutzung von (68):

$$\mathfrak{F} = \frac{4\cos\vartheta}{c} \cdot I.$$

Vergleicht man diese Beziehung mit der Gleichung (64), in welcher alle Zeichen die nämliche physikalische Bedeutung haben, so erkennt man, daß der NEWTONsche Strahlungsdruck doppelt so groß ist als der MAXWELLsche bei gleicher Energiestrahlung, und daraus folgt mit Notwendigkeit, daß die Größe des MAXWELLschen Strahlungsdruckes nicht aus allgemeinen energetischen Überlegungen abgeleitet werden kann, sondern daß sie der elektromagnetischen Theorie eigentümlich ist. Daher sind auch alle aus dem MAXWELLschen Strahlungsdrucke abgeleiteten Folgerungen als Folgerungen der elektromagnetischen Lichttheorie, und alle Bestätigungen derselben als Bestätigungen dieser speziellen Theorie anzusehen.

Zweites Kapitel. Stefan-Boltzmannsches Strahlungsgesetz.

§ 61. Wir denken uns im folgenden einen vollständig evakuierten Hohlzylinder mit einem absolut dicht schließenden, in vertikaler Richtung ohne Reibung frei beweglichen Kolben. Ein Teil der Wandung des Zylinders, etwa der feste Boden, bestehe aus einem schwarzen Körper, dessen Temperatur T willkürlich von außen reguliert werden kann. Die übrige Wand, auch die innere Kolbenfläche, sei vollständig reflektierend. Dann wird, bei ruhendem Kolben und bei konstant gehaltener Temperatur T, die Strahlung im Vakuum nach einiger Zeit den Charakter der schwarzen, nach allen Richtungen gleichmäßigen Strahlung (§ 50) annehmen, deren spezifische Intensität K und räumliche Dichte u nur von der Temperatur T abhängt, insbesondere auch unabhängig ist von dem Volumen V des Vakuums, also von der Stellung des Kolbens.

Bewegt man nun den Kolben nach unten, so wird die Strahlung auf einen kleineren Raum zusammengedrängt, bewegt man ihn nach oben, so dehnt sie sich auf einen größeren Raum aus. Gleichzeitig kann man auch die Temperatur T des schwarzen Bodenkörpers durch Zuleitung oder Ableitung äußerer Wärme willkürlich verändern. Dadurch treten jedesmal gewisse Störungen des stationären Zustandes ein; es läßt sich aber durch gehörige Verlangsamung der willkürlich vorgenommenen Änderungen von V und T immer erreichen, daß die Abweichungen von den Bedingungen des stationären Zustandes beliebig klein bleiben, und daß man daher, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, den Strahlungszustand im Vakuum immer als einen thermodynamischen Gleichgewichtszustand betrachten kann, ganz ähnlich, wie es in der Thermodynamik ponderabler Substanzen bei sogenannten unendlich langsamen Prozessen geschieht, in denen die jeweiligen Abweichungen vom Gleichgewichtszustand zu vernachlässigen sind gegenüber den Änderungen, die das behandelte System schließlich durch den ganzen Prozeß erleidet.

Hält man z. B. die Temperatur T des schwarzen Bodenkörpers konstant, was durch geeignete Verbindung desselben mit einem Wärmereservoir von großer Kapazität geschehen kann, so wird bei Hebung des Kolbens der schwarze Körper so lange stärker emittieren als absorbieren, bis der neu geschaffene Raum mit der nämlichen Strahlungsdichte wie früher angefüllt ist. Umgekehrt wird bei Senkung des Kolbens der schwarze Körper die überschüssige Strahlung absorbieren, bis wieder die ursprüngliche, der Temperatur T entsprechende Strahlung hergestellt ist. Ebenso wird bei Erhöhung der Temperatur T des schwarzen Körpers, die durch Wärmezuleitung aus einem um ein äußerst Geringes wärmeren Reservoir bewirkt werden kann, die Strahlungsdichte im Vakuum durch Mehremission entsprechend erhöht werden, usw. Zur größeren Beschleunigung der Herstellung des Strahlungsgleichgewichtes kann man den reflektierenden Mantel des Hohlzylinders als weiß (§ 10) voraussetzen, da durch die diffuse Reflexion die durch die Bewegungsrichtung des Kolbens etwa entstehenden Vorzugsrichtungen der Strahlung schneller ausgeglichen werden. Als reflektierende Kolbenfläche wollen wir aber bis auf weiteres einen vollkommenen Metallspiegel wählen, um des Maxwellschen Strahlungsdruckes (66) auf den

Kolben sicher zu sein. Dann muß, um das mechanische Gleichgewicht herzustellen, der Kolben mit einem Gewicht belastet werden, welches gleich ist dem Produkt des Strahlungsdruckes p und dem Querschnitt des Kolbens. Eine minimale Abweichung des belastenden Gewichtes von diesem Wert bringt dann eine entsprechend langsame Bewegung des Kolbens nach der einen oder der anderen Seite hervor.

Da die Einwirkungen, welche bei den hier ins Auge gefaßten Prozessen von außen auf das betrachtete System, den durchstrahlten Hohlraum, stattfinden, teils mechanischer Natur (Verschiebung des beschwerten Kolbens), teils thermischer Natur (Wärmeleitung vom und zum Reservoir) sind, so haben sie eine gewisse Ähnlichkeit mit den in der Thermodynamik gewöhnlich betrachteten Vorgängen, nur daß hier das zugrunde gelegte System kein materielles ist, wie z. B. ein Gas, sondern ein rein energetisches. Wenn aber die Hauptsätze der Thermodynamik in der Natur universelle Gültigkeit besitzen, was wir hier überall voraussetzen, so müssen sie auch für das hier betrachtete System Bedeutung haben. Es muß nämlich bei irgend einer in der Natur eintretenden Veränderung die Energie aller an der Änderung beteiligten Systeme konstant bleiben (erster Hauptsatz), und es muß ferner die Entropie aller an der Änderung beteiligten Systeme größer werden, im Grenzfall, bei reversibeln Prozessen, ungeändert bleiben (zweiter Hauptsatz).

§ 62. Bilden wir zunächst die Gleichung des ersten Hauptsatzes für eine unendlich kleine Änderung des betrachteten Systems. Daß dem durchstrahlten Hohlraum eine bestimmte Energie zukommt, haben wir schon früher (§ 22) aus dem Umstand abgeleitet, daß die Energiestrahlung sich mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzt. Wir bezeichnen sie mit U. Dann ist:

$$U = V \cdot u, \tag{70}$$

wobei u, die räumliche Strahlungsdichte, allein von der Temperatur T des schwarzen Bodenkörpers abhängt.

Die bei einer Vergrößerung des Volumens V des Hohlraumes um dV von dem System gegen die äußeren Druckkräfte (Gewicht des belasteten Kolbens) geleistete Arbeit ist $p \cdot dV$, wobei p den MAXWELLschen Strahlungsdruck (66) darstellt. Dieser Betrag von mechanischer Energie wird also außerhalb

des Systems gewonnen, indem das Gewicht gehoben wird. Der Fehler, den wir dadurch begehen, daß wir hier den Strahlungsdruck auf eine ruhende Fläche benutzen, während doch die reflektierende Fläche während der Volumenänderung sich bewegt, ist offenbar zu vernachlässigen, da man sich die Bewegung mit beliebig kleiner Geschwindigkeit erfolgend denken kann.

Bezeichnet ferner Q die unendlich kleine Wärmemenge im mechanischen Maße, welche von dem schwarzen Bodenkörper an den durchstrahlten Raum durch Mehremission abgegeben wird, so verliert der Bodenkörper bez. das mit ihm in Verbindung stehende Wärmereservoir diese Wärme Q, wodurch seine innere Energie sich um diesen Betrag vermindert. Folglich ist nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, da die Summe der Strahlungsenergie und der Energie der materiellen Körper konstant bleibt:

$$dU + pdV - Q = o. \tag{71}$$

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kommt dem durchstrahlten Vakuum auch eine bestimmte Entropie zu. Denn wenn die Wärme Q von dem Wärmereservoir an den Hohlraum abgegeben wird, so verkleinert sich die Entropie des Reservoirs, und zwar verändert sie sich um:

$$-\frac{Q}{T}.$$

Infolgedessen muß, da in anderen Körpern keine Änderungen eintreten — denn der starre und absolut reflektierende Kolben mit dem darauf lastenden Gewicht ändert auch bei der Bewegung seinen inneren Zustand nicht — als Kompensation eine Entropieänderung mindestens im Betrage $\frac{Q}{T}$ in der Natur eintreten, durch welche jene Verkleinerung kompensiert wird, und hierfür kann nur die Entropie des durchstrahlten Hohlraumes in Anspruch genommen werden, die wir mit S bezeichnen wollen.

Da nun aber die hier beschriebenen Prozesse aus lauter Gleichgewichtszuständen bestehen, so sind sie vollkommen reversibel, es findet also keine Entropievermehrung statt, sondern wir haben:

$$dS - \frac{Q}{T} = o, \tag{72}$$

oder aus (71):

$$dS = \frac{dU + p\,dV}{T}. \tag{73}$$

In dieser Gleichung stellen die Größen U, p, V und S gewisse Eigenschaften der Wärmestrahlung vor, die durch den augenblicklichen Zustand der Strahlung vollkommen bestimmt sind. Folglich ist auch die Größe T eine gewisse Eigenschaft des Zustandes der Strahlung, d. h. die schwarze Strahlung im Hohlraum besitzt eine gewisse Temperatur T, und diese Temperatur ist diejenige eines mit der Strahlung im Wärmegleichgewicht stehenden Körpers.

§ 63. Wir wollen nun aus der letzten Gleichung diejenige Folgerung ableiten, die aus dem Umstand entspringt, daß der Zustand des betrachteten Systems und mithin auch seine Entropie durch die Werte zweier unabhängiger Variablen bestimmt ist. Als erste Variable wählen wir V, als zweite können wir entweder T, oder u, oder p wählen, von welchen drei Größen zwei durch die dritte allein bestimmt sind. Wir wollen die Temperatur T neben dem Volumen V als unabhängige Variable nehmen. Dann ergibt die Substitution von (66) und (70) in (73):

$$dS = \frac{V}{T}\frac{du}{dT}\,dT + \frac{4u}{3T}\,dV. \tag{74}$$

Daraus: $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T}\frac{du}{dT}$, und $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{4u}{3T}$.

Differentiiert man die erste dieser Gleichungen partiell nach V, die zweite partiell nach T, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T\,\partial V} = \frac{1}{T}\frac{du}{dT} = \frac{4}{3T}\frac{du}{dT} - \frac{4u}{3T^2},$$

oder:

$$\frac{du}{dT} = \frac{4u}{T}.$$

Integriert:

$$u = a\,T^4 \tag{75}$$

und nach (21) als spezifische Intensität der schwarzen Strahlung:

$$K = \frac{c}{4\pi}u = \frac{ac}{4\pi}\cdot T^4. \tag{76}$$

Ferner als Druck der schwarzen Strahlung:

$$p = \frac{a}{3}T^4 \tag{77}$$

und als Gesamtenergie der Strahlung:

$$U = a T^4 \cdot V. \tag{78}$$

Dieses Gesetz, welches ausspricht, daß die räumliche Dichte und die spezifische Intensität der schwarzen Strahlung der vierten Potenz der absoluten Temperatur proportional sind, ist zuerst von J. Stefan[1] auf Grund ziemlich roher Messungen aufgestellt, später von L. Boltzmann[2] auf thermodynamischer Grundlage aus dem Maxwellschen Strahlungsdruck abgeleitet, und in neuerer Zeit durch exakte Messungen von O. Lummer und E. Pringsheim[3] zwischen 100° und 1300° C., wobei die Temperatur durch das Gasthermometer definiert wurde, bestätigt worden. In Temperaturgebieten und bei Genauigkeitsanforderungen, für welche die Angaben der verschiedenen Gasthermometer nicht mehr genügend miteinander übereinstimmen oder überhaupt nicht zu ermitteln sind, kann das Stefan-Boltzmannsche Strahlungsgesetz zu einer absoluten, von jeder Substanz unabhängigen Definition der Temperatur verwendet werden.

§ 64. Der Zahlenwert der Konstanten a ergibt sich aus Messungen von F. Kurlbaum.[4] Hiernach ist, wenn man mit S_t die gesamte Energie bezeichnet, die von 1 qcm eines auf t^0 C. befindlichen schwarzen Körpers in 1 sec in die Luft ausgestrahlt wird:

$$S_{100} - S_0 = 0{,}0731 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2} = 7{,}31 \cdot 10^5 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2\,\text{sec}}.$$

Da nun die Strahlung in Luft nahezu identisch ist mit der Strahlung ins Vakuum, so kann nach (7) und (76) gesetzt werden:

$$S_t = \pi K = \frac{a c}{4} \cdot (273 + t)^4$$

und wir erhalten:

$$S_{100} - S_0 = \frac{a c}{4} \cdot (373^4 - 273^4).$$

Also: $$a = \frac{4 \cdot 7{,}31 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^{10} \cdot (373^4 - 273^4)} = 7{,}061 \cdot 10^{-15} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\,\text{grad}^4}. \tag{79}$$

[1] J. Stefan, Wien. Ber. **79**, p. 391, 1879.

[2] L. Boltzmann, Wied. Ann. **22**, p. 291, 1884.

[3] O. Lummer und E. Pringsheim, Wied. Ann. **63**, p. 395, 1897. Drudes Ann. **3**, p. 159, 1900.

[4] F. Kurlbaum, Wied. Ann. **65**, p. 759, 1898.

§ 65. Die Größe der Entropie S der schwarzen Strahlung ergibt sich durch Integration der Differentialgleichung (73) zu:

$$S = \frac{4}{3} a T^3 \cdot V, \tag{80}$$

wenn man eine belanglose additive Konstante fortläßt. Daraus die Entropie der Volumeneinheit, oder die räumliche Entropiedichte der schwarzen Strahlung:

$$\frac{S}{V} = s = \frac{4}{3} a T^3. \tag{81}$$

§ 66. Wir wollen uns zunächst noch von einer beschränkenden Voraussetzung befreien, die wir machen mußten, um den von uns im vorigen Kapitel berechneten Wert des MAXWELLschen Strahlungsdruckes anwenden zu können. Bisher hatten wir den Zylinder als fest und nur den Kolben als frei beweglich angenommen. Jetzt wollen wir uns das ganze Gefäß, bestehend aus dem Zylinder, dem schwarzen Boden und dem Kolben, der in einer bestimmten Höhe über dem Boden an der Wandung des Zylinders befestigt sei, uns im Raume frei beweglich denken. Dann muß das Gefäß als Ganzes nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung, da gar keine Kraft von außen darauf wirkt, dauernd in Ruhe bleiben. Dies würde übrigens auch dann gefolgert werden müssen, wenn man das Gegenwirkungsprinzip nicht von vornherein für diesen Fall als gültig anerkennen wollte. Denn würde das Gefäß in Bewegung geraten, so könnte die lebendige Kraft dieser Bewegung nur auf Kosten der Wärme des Bodenkörpers oder der Strahlungsenergie entstehen, da sonst keine andere disponible Energie in dem von einer starren Hülle umschlossenen System vorhanden ist, und es müßte zugleich mit der Energie auch die Entropie des Körpers oder der Strahlung abnehmen, was dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik widersprechen würde, da sonst keine Entropieänderungen in der Natur eintreten. Das Gefäß befindet sich also als Ganzes im mechanischen Gleichgewicht. Daraus folgt sogleich, daß der Druck der Strahlung auf den schwarzen Boden ebensogroß ist wie der entgegengesetzt gerichtete auf den spiegelnden Kolben, daß also der Druck der schwarzen Strahlung auf einen schwarzen Körper von der nämlichen Temperatur ebensogroß ist wie der auf einen spiegelnden

Körper, und das nämliche läßt sich leicht für eine beliebige vollständig reflektierende Fläche beweisen, die man am Boden des Zylinders befindlich annehmen kann, ohne den stationären Strahlungszustand irgendwie zu stören. Daher läßt sich bei allen vorhergehenden Betrachtungen das Spiegelmetall durch einen beliebigen vollständig reflektierenden oder auch durch einen schwarzen Körper von der Temperatur des Bodenkörpers ersetzen, und man kann allgemein den Satz aussprechen, daß der Strahlungsdruck nur von der Beschaffenheit der hin- und hergehenden Strahlung, nicht aber von der Beschaffenheit der angrenzenden Substanz abhängt.

§ 67. Wenn bei der Hebung des Kolbens die Temperatur des schwarzen Bodenkörpers durch entsprechende Wärmezufuhr aus dem Reservoir konstant erhalten wird, so verläuft der Vorgang isotherm. Dann bleibt mit der Temperatur T auch die Energiedichte u, der Strahlungsdruck p und die Entropiedichte s konstant; infolgedessen wächst die Gesamtenergie der Strahlung von $U = u\,V$ auf $U' = u\,V'$, die Entropie von $S = s\,V$ auf $S' = s\,V'$, und für die aus dem Wärmereservoir zugeführte Wärme erhält man durch Integration von (72) bei konstantem T:

$$Q = T \cdot (S' - S) = T s \cdot (V' - V)$$

oder nach (81) und (75):

$$Q = \frac{4}{3} a T^4 (V' - V) = \frac{4}{3} (U' - U).$$

Wie man sieht, übersteigt die von außen zugeführte Wärme den Betrag der Vermehrung der Strahlungsenergie $(U' - U)$ um $\frac{1}{3}(U' - U)$. Diese Mehrzufuhr von Wärme ist nötig, um die mit der Vergrößerung des Strahlungsvolumens verbundene äußere Arbeit zu leisten.

§ 68. Betrachten wir auch einen reversibeln adiabatischen Prozeß. Hierfür ist notwendig, daß nicht nur der Kolben und die Mantelfläche, sondern auch der Boden des Zylinders als vollständig reflektierend, etwa als weiß, vorausgesetzt wird. Dann ist bei der Kompression oder Ausdehnung des Strahlungsraumes die von außen zugeführte Wärme $Q = 0$, und die Energie der Strahlung ändert sich nur um den Betrag der äußeren Arbeit $p \cdot dV$. Um indessen sicher zu sein, daß bei einem endlichen adiabatischen Prozeß die Strahlung in jedem Augenblick

vollständig stabil ist, d. h. den Charakter der schwarzen Strahlung besitzt, wollen wir innerhalb des evakuierten Hohlraumes noch ein minimales Kohlenstäubchen als vorhanden voraussetzen. Dieses Körperchen, von dem wir annehmen können, daß es für sämtliche Strahlenarten ein von Null verschiedenes Absorptionsvermögen besitzt, dient nur dazu, um das stabile Gleichgewicht der Strahlung im Hohlraum herzustellen (§ 51 f.) und dadurch die Reversibilität des Vorgangs zu verbürgen, während seine Körperwärme gegen die Strahlungsenergie U so klein angenommen werden kann, daß die zu einer merklichen Temperaturänderung des Stäubchens erforderliche Wärmezufuhr ganz zu vernachlässigen ist. Dann herrscht in jedem Augenblick des Prozesses absolut stabiles Strahlungsgleichgewicht, und die Strahlung besitzt die Temperatur des in dem Hohlraum befindlichen Stäubchens. Volumen, Energie und Entropie des Stäubchens können ganz vernachlässigt werden.

Bei der reversibeln adiabatischen Änderung bleibt nach (72) die Entropie S des Systems konstant. Es folgt also als Bedingung dieses Prozesses aus (80):

$$T^3 \cdot V = \text{const}$$

oder auch nach (77): $$p \cdot V^{\frac{4}{3}} = \text{const},$$

d. h. bei adiabatischer Kompression steigt die Strahlungstemperatur und der Strahlungsdruck in der angegebenen Weise. Die Energie der Strahlung U ändert sich dabei nach dem Gesetz:

$$\frac{U}{T} = \tfrac{3}{4} S = \text{const},$$

d. h. sie wächst proportional der absoluten Temperatur, trotzdem das Volumen kleiner wird.

§ 69. Wir wollen schließlich noch als weiteres Beispiel einen einfachen Fall eines irreversibeln Prozesses betrachten. Der allseitig von absolut reflektierenden Wänden umschlossene Hohlraum vom Volumen V sei gleichmäßig von schwarzer Strahlung erfüllt. Nun stelle man, etwa durch Drehen eines Hahnes, an irgend einer Stelle der Wandung eine kleine Öffnung her, durch welche die Strahlung in einen anderen ebenfalls von absolut reflektierenden festen Wänden umgebenen vollständig evakuierten Raum austreten kann. Dann wird die Strahlung zunächst einen sehr unregelmäßigen Charakter annehmen, nach einiger Zeit

aber wird sich ein stationärer Strahlungszustand einstellen, der beide kommunizierende Räume, deren Gesamtvolumen V' sei, gleichmäßig erfüllt. Durch die Anwesenheit eines Kohlestäubchens sei dafür gesorgt, daß auch im neuen Zustand alle Bedingungen der schwarzen Strahlung erfüllt sind. Dann ist, weil weder äußere Arbeit noch äußere Wärmezufuhr stattgefunden hat, nach dem ersten Hauptsatz die Energie im neuen Zustand gleich der im alten: $U' = U$, und daher nach (78):

$$T'^4 V' = T^4 V$$

$$\frac{T'}{T} = \sqrt[4]{\frac{V}{V'}}$$

und dadurch der neue Gleichgewichtszustand vollkommen bestimmt. Da $V' > V$, so ist die Temperatur der Strahlung durch den Vorgang erniedrigt worden.

Nach dem zweiten Hauptsatz muß die Entropie des Systems gewachsen sein, da sonst keine äußeren Veränderungen stattgefunden haben; in der Tat ist nach (80):

$$\frac{S'}{S} = \frac{T'^3 V'}{T^3 V} = \sqrt[4]{\frac{V'}{V}} > 1 . \qquad (82)$$

§ 70. Wenn der Vorgang der irreversibeln adiabatischen Ausdehnung der Strahlung vom Volumen V auf das Volumen V' genau ebenso erfolgt, wie vorhin beschrieben, nur mit dem einzigen Unterschied, daß kein Kohlenstäubchen in das Vakuum eingelagert ist, so wird nach Herstellung des gleichmäßigen Strahlungszustandes, welche infolge der diffusen Reflexion an den Wänden des Hohlraums nach gehöriger Zeit eintreten wird, im neuen Volumen V' die Strahlung nicht mehr den Charakter der schwarzen Strahlung haben, also auch keine bestimmte Temperatur besitzen. Wohl aber besitzt auch dann die Strahlung, wie überhaupt jedes in einem bestimmten Zustand befindliche physikalische System, eine bestimmte Entropie, die nach dem zweiten Hauptsatz größer ist als die anfängliche S, aber nicht so groß als die oben in (82) ausgedrückte S'. Ihre Berechnung kann erst auf Grund späterer Sätze erfolgen (vgl. § 103). Bringt man dann nachträglich in das Vakuum ein Kohlestäubchen, so stellt sich durch einen zweiten irreversibeln Prozeß das absolut stabile Strahlungsgleichgewicht her, indem die Strahlung bei

konstanter Gesamtenergie die normale Energieverteilung der schwarzen Strahlung annimmt, und die Entropie steigt dabei auf den durch (82) gegebenen Maximalwert S'.

Drittes Kapitel. Wiensches Verschiebungsgesetz.

§ 71. Wenn durch das STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz die Abhängigkeit der räumlichen Dichte u und der spezifischen Intensität K der schwarzen Strahlung von der Temperatur bestimmt ist, so ist dadurch für die Kenntnis der auf eine bestimmte Schwingungszahl ν bezogenen räumlichen Strahlungsdichte u_ν, und der spezifischen Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ der monochromatischen Strahlung, welche miteinander durch die Gleichung (24), und mit u und K durch die Gleichungen (22) und (12) verknüpft sind, noch verhältnismäßig wenig gewonnen, und es bleibt als ein Hauptproblem der Theorie der Wärmestrahlung die Aufgabe bestehen, die Größen u_ν und $\mathfrak{K}_\nu$ für die schwarze Strahlung im Vakuum, und dadurch nach (42) auch in jedem beliebigen Medium, als Funktionen von ν und T zu bestimmen, oder mit anderen Worten: die Verteilung der Energie im Normalspektrum für jede beliebige Temperatur anzugeben. Ein wesentlicher Schritt zur Lösung dieser Aufgabe ist in dem von W. WIEN aufgestellten sogenannten „Verschiebungsgesetz“[1] enthalten, dessen Bedeutung darin besteht, daß es die Funktionen u_ν und $\mathfrak{K}_\nu$ der beiden Argumente ν und T auf eine Funktion eines einzigen Arguments zurückführt.

Den Ausgangspunkt des WIENschen Verschiebungsgesetzes bildet folgender Satz. Wenn die in einem vollständig evakuierten Hohlraum mit absolut reflektierenden Wänden enthaltene schwarze Strahlung adiabatisch und unendlich langsam komprimiert oder dilatiert wird, wie im § 68 beschrieben wurde, so behält die Strahlung, auch ohne daß ein Kohlestäubchen sich im Vakuum befindet, stets den Charakter der schwarzen

[1] W. WIEN, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. Berlin vom 9. Febr. 1893, p. 55. WIED. Ann. **52**, p. 132, 1894. Vgl. ferner u. a.: M. THIESEN, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, **2**, p. 65, 1900. H. A. LORENTZ, Akad. d. Wissensch. Amsterdam, 18. Mai 1901, p. 607. M. ABRAHAM, DRUDES Ann. **14**, p. 236, 1904.

Strahlung bei. Der Prozeß verläuft also auch im absoluten Vakuum genau so wie im § 68 berechnet wurde, und die dort als Vorsichtsmaßregel angewandte Einführung des Kohlestäubchens zeigt sich als überflüssig, allerdings nur in diesem speziellen Falle, nicht etwa auch in dem § 70 beschriebenen Falle.

Die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes ergibt sich aus folgendem. Man komprimiere den anfänglich mit schwarzer Strahlung erfüllten vollständig evakuierten Hohlzylinder adiabatisch und unendlich langsam auf einen endlichen Bruchteil seines ursprünglichen Volumens. Wäre nun, nach Vollendung der Kompression, die Strahlung nicht mehr schwarz, so bestände kein stabiles thermodynamisches Gleichgewicht der Strahlung (§ 51). Dann könnte man durch Einbringung eines Kohlestäubchens, dem im Vergleich zur Strahlungsenergie keine merkliche Körperwärme zukommt, bei konstantem Volumen und konstanter Gesamtenergie der Strahlung eine endliche Umwandlung, nämlich den Übergang zum absolut stabilen Strahlungszustand, und damit eine endliche Entropievermehrung des Systems herbeiführen. Diese Veränderung würde natürlich nur die spektrale Strahlungsdichte u_ν betreffen, während dagegen die gesamte Energiedichte u konstant bleibt. Nachdem dies geschehen, könnte man, das Kohlestäubchen in dem Raume belassend, den Hohlzylinder wieder adiabatisch und unendlich langsam auf sein ursprüngliches Volumen vergrößern und hierauf das Kohlestäubchen entfernen. Dann hat das System einen Kreisprozeß durchgemacht, ohne daß irgendwelche äußere Veränderungen zurückgeblieben sind. Denn Wärme ist überhaupt weder zu- noch abgeleitet worden, und die auf die Kompression verwendete mechanische Arbeit ist bei der Ausdehnung genau wieder gewonnen worden; denn diese hängt, ebenso wie der Strahlungsdruck, nur von der Gesamtdichte u der Strahlungsenergie, nicht von ihrer spektralen Verteilung ab. Infolgedessen ist nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik auch die gesamte Strahlungsenergie am Schluß wieder dieselbe wie am Anfang und daher auch die Temperatur der schwarzen Strahlung wieder die nämliche. Das Kohlestäubchen und seine Veränderungen zählt nicht mit; denn seine Energie und Entropie sind verschwindend klein gegen die betreffenden Größen des Systems. Der Prozeß ist also in allen Einzelheiten rückgängig gemacht, man kann ihn beliebig

oft hintereinander wiederholen, ohne daß irgend eine dauernde Veränderung in der Natur eintritt. Dies widerspricht der oben gemachten Voraussetzung einer endlichen Entropievermehrung; denn eine solche läßt sich, wenn einmal eingetreten, auf keinerlei Weise vollständig rückgängig machen. Es kann also durch die Einbringung des Kohlestäubchens in den Strahlungsraum keine endliche Entropievermehrung herbeigeführt worden sein, sondern die Strahlung befand sich schon vorher und jederzeit im stabilen Gleichgewichtszustand.

§ 72. Damit das Wesentliche dieses wichtigen Beweises noch klarer hervortritt, sei auf eine analoge einigermaßen naheliegende Betrachtung hingewiesen. Ein Hohlraum, in dem sich anfänglich ein Dampf gerade im Zustand der Sättigung befindet, werde adiabatisch und unendlich langsam komprimiert.

„Dann verbleibt der Dampf bei beliebiger endlicher adiabatischer Kompression immer gerade im Zustand der Sättigung. Denn würde er z. B. bei der Kompression übersättigt werden, so könnte man, nachdem die Kompression auf einen merklichen Bruchteil des ursprünglichen Volumens stattgefunden hat, durch Einbringung eines winzigen Flüssigkeitströpfchens, dem keine merkliche Masse und Wärmekapazität zukommt, bei konstantem Volumen und konstanter Gesamtenergie die Kondensation einer endlichen Menge Dampf, und damit den endlichen Übergang in einen stabileren Zustand, also eine endliche Entropievermehrung des Systems herbeiführen. Nachdem dies geschehen, könnte man das Volumen wieder adiabatisch und unendlich langsam vergrößern, bis alle Flüssigkeit verdampft ist, und dadurch den Prozeß vollständig rückgängig machen, was der angenommenen Entropievermehrung widerspricht."

Ein solches Beweisverfahren würde deshalb fehlerhaft sein, weil durch den beschriebenen Prozeß die eingetretene Veränderung keineswegs vollständig rückgängig gemacht ist. Denn da die bei der Kompression des übersättigten Dampfes aufgewendete mechanische Arbeit nicht gleich ist der bei der Ausdehnung des gesättigten Dampfes wiedergewonnenen, so entspricht einem bestimmten Volumen des Systems bei der Kompression eine andere Energie als bei der Ausdehnung, und deshalb kann auch das Volumen, bei dem alle Flüssigkeit gerade wieder verdampft ist, nicht gleich dem ursprünglichen Anfangsvolumen sein. Die

gemutmaßte Analogie ist also hinfällig, und die oben in Anführungszeichen gesetzte Behauptung unrichtig.

§ 73. Wir wollen uns nun wieder den in § 68 beschriebenen reversibeln adiabatischen Prozeß mit der in dem evakuierten Hohlzylinder mit weißen Wänden und weißem Boden befindlichen schwarzen Strahlung ausgeführt denken, indem wir den aus absolut spiegelndem Metall bestehenden Kolben unendlich langsam herabsinken lassen, nur mit dem Unterschied, daß sich diesmal kein Kohlestäubchen in dem Zylinder befindet. Dann verläuft der Prozeß, wie wir jetzt wissen, genau so wie dort. Wir können uns aber nun, da jetzt überhaupt keine Emission und Absorption der Strahlung stattfindet, Rechenschaft geben von den Änderungen, welche die einzelnen Strahlenbündel des Systems an Farbe und Intensität erleiden. Solche Änderungen treten natürlich nur bei der Reflexion an dem bewegten Metallspiegel, nicht bei der Reflexion an den ruhenden Wänden und an dem ruhenden Boden des Zylinders ein.

Wenn der spiegelnde Kolben mit der konstanten unendlich kleinen Geschwindigkeit v sich herabsenkt, so werden die ihn währenddem treffenden monochromatischen Strahlenbündel bei der Reflexion eine Änderung ihrer Farbe, ihrer Intensität und ihrer Richtung erleiden. Betrachten wir diese verschiedenen Einflüsse der Reihe nach hintereinander.[1]

§ 74. Zunächst fragen wir nach der Farbenänderung, die ein monochromatischer Strahl durch Reflexion an dem unendlich langsam bewegten Spiegel erleidet, und betrachten zu diesem Zweck erst den Fall eines in normaler Richtung, von unten nach oben, auf den Spiegel fallenden und daher auch in normaler Richtung, von oben nach unten, reflektierten Strahles. Die Ebene A (Fig. 5) bedeute die Lage des Spiegels zur Zeit t, die Ebene A' die zur Zeit $t + \delta t$, wobei die Entfernung $AA' = v \cdot \delta t$, wenn v die Geschwindigkeit des Spiegels bedeutet. Denken wir uns nun durch das durchstrahlte Vakuum in gehöriger Entfernung

[1] Eine vollständige Lösung des Problems der Reflexion eines Strahlenbündels an einer bewegten absolut spiegelnden Fläche, auch bei beliebig großer Geschwindigkeit derselben, findet sich in der § 71 zitierten Abhandlung von M. Abraham. Hierbei sind die Gesetze der Elektrodynamik bewegter Körper zugrunde gelegt. Vgl. auch desselben Autors Lehrbuch: Elektromagnetische Theorie der Strahlung, 1905 (Leipzig, B. G. Teubner).

vom Spiegel eine dem Spiegel parallele ruhende Ebene B gelegt, und nennen wir λ die Wellenlänge des auf den Spiegel treffenden, λ' die Wellenlänge des vom Spiegel reflektierten Strahles, so liegen zur Zeit t auf der Strecke AB des durchstrahlten Vakuums $\frac{AB}{\lambda}$ Wellen des einfallenden, und $\frac{AB}{\lambda'}$ Wellen des reflektierten Strahles, was man sich etwa dadurch versinnlichen kann, daß man die elektrische Feldstärke in den verschiedenen Punkten je eines der beiden Strahlen zur Zeit t sich in Form einer Sinuskurve aufgezeichnet denkt. Im ganzen liegen also zur Zeit t in dem Zwischenraum zwischen A und B

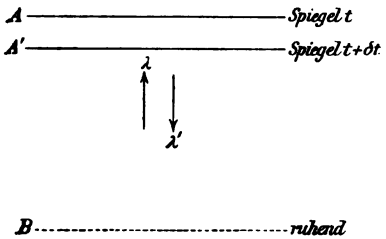


Fig. 5.

$$AB \cdot \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)$$

Wellen, einfallender und reflektierter Strahl zusammengenommen. Da diese Anzahl sehr groß ist, so kommt es nicht darauf an, ob es eine ganze Zahl ist oder nicht.

Ebenso liegen zur Zeit $t + \delta t$, wenn sich der Spiegel in A' befindet, in dem Zwischenraum zwischen A' und B im ganzen

$$A'B \cdot \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) \text{ Wellen.}$$

Die letzte Zahl wird kleiner sein als die erste, da in dem kleineren Zwischenraum $A'B$ eine geringere Anzahl Wellen von beiden Arten Platz finden, als vorher in dem größeren Zwischenraum AB. Der Rest der Wellen muß während der Zeit δt aus dem Zwischenraum zwischen dem bewegten Spiegel und der ruhenden Ebene B hinausgedrängt worden sein, und zwar durch die Ebene B hindurch nach unten; denn auf andere Weise kann keine Welle aus dem betrachteten Raum verschwinden.

Nun gehen durch die ruhende Ebene B in der Zeit δt in der Richtung nach oben: $v \cdot \delta t$ Wellen, in der Richtung nach unten: $v' \cdot \delta t$ Wellen; folglich ist die Differenz:

$$(v' - v)\,\delta t = (AB - A'B) \cdot \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)$$

oder, da:

$$AB - A'B = v \cdot \delta t$$

und

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad \lambda' = \frac{c}{\nu'}$$

$$\nu' = \frac{c+v}{c-v} \cdot \nu,$$

oder, da v unendlich klein gegen c,

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{2v}{c}\right).$$

§ 75. Wenn die Strahlung nicht in normaler Richtung, sondern unter dem spitzen Einfallswinkel ϑ auf den Spiegel fällt, so kann man eine ganz ähnliche Betrachtung anstellen,

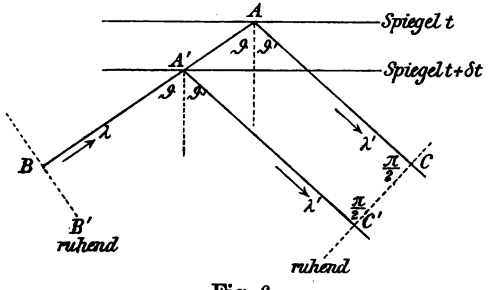


Fig. 6.

nur mit dem Unterschied, daß dann der Schnittpunkt A eines bestimmten ins Auge gefaßten Strahles BA mit dem Spiegel zur Zeit t eine andere Lage auf dem Spiegel hat als der Schnittpunkt A' desselben Strahles mit dem Spiegel zur Zeit $t + \delta t$ (Fig. 6). Die Anzahl der Wellen, welche zur Zeit t auf der Strecke BA liegen, ist $\frac{BA}{\lambda}$. Ebenso ist zu der nämlichen Zeit t die Anzahl der Wellen auf der Strecke AC, welche die Entfernung des Punktes A von einer im Vakuum ruhenden Wellenebene CC' des reflektierten Strahles darstellt, $\frac{AC}{\lambda'}$. Im ganzen liegen also zur Zeit t auf der Strecke BAC des betrachteten Strahles

$$\frac{BA}{\lambda} + \frac{AC}{\lambda'}$$

Wellen. Hierbei sei noch bemerkt, daß der Reflexionswinkel ϑ'

nicht genau gleich dem Einfallswinkel ist, sondern, wie sich durch eine einfache geometrische Überlegung zeigen läßt, etwas kleiner. Die Differenz zwischen ϑ und ϑ' wird sich aber für unsere Berechnung als unwesentlich erweisen.

Ferner liegen zur Zeit $t + \delta t$, wenn der Spiegel durch A' geht, auf der Strecke $BA'C'$

$$\frac{BA'}{\lambda} + \frac{A'C'}{\lambda'}$$

Wellen. Die letzte Zahl ist kleiner als die erste, und zwar muß die Differenz gleich der Anzahl der Wellen sein, welche während der Zeit δt aus dem Raume, der durch die ruhende Ebene BB' und durch die ruhende Ebene CC' begrenzt wird, im ganzen hinausgedrängt worden sind.

Nun gehen durch die Ebene BB' in der Zeit δt in den Raum hinein $\nu \cdot \delta t$ Wellen, durch die Ebene CC' aus dem Raum hinaus $\nu' \cdot \delta t$ Wellen. Folglich ist

$$(\nu' - \nu) \cdot \delta t = \left(\frac{BA}{\lambda} + \frac{AC}{\lambda'}\right) - \left(\frac{BA'}{\lambda} + \frac{A'C'}{\lambda'}\right).$$

Es ist aber:

$$BA - BA' = AA' = \frac{v \cdot \delta t}{\cos\vartheta}$$

$$AC - A'C' = AA' \cdot \cos(\vartheta + \vartheta')$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \qquad \lambda' = \frac{c}{\nu'}.$$

Folglich: $$\nu' = \frac{c\cos\vartheta + v}{c\cos\vartheta - v\cos(\vartheta + \vartheta')} \cdot \nu.$$

Diese Beziehung gilt für eine beliebig große Geschwindigkeit v des bewegten Spiegels. Da nun in unserem Fall v unendlich klein ist gegen c, so wird einfacher:

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 + \frac{v}{c\cos\vartheta} \cdot [1 + \cos(\vartheta + \vartheta')]\right).$$

Die Differenz der Winkel ϑ und ϑ' ist jedenfalls von der Größenordnung $\frac{v}{c}$; daher kann man hier ohne merklichen Fehler ϑ' durch ϑ ersetzen, und erhält so:

$$\nu' = \nu \cdot \left(1 + \frac{2v\cos\vartheta}{c}\right) \tag{83}$$

als Schwingungszahl des reflektierten Strahles für schiefe Inzidenz.

§ 76. Aus dem Vorstehenden erhellt, daß die Schwingungszahlen aller auf den bewegten Spiegel treffenden Strahlen durch die Reflexion vergrößert werden, wenn sich der Spiegel gegen die Strahlung bewegt, dagegen verkleinert werden, wenn der Spiegel sich in Richtung der auffallenden Strahlung bewegt ($v < o$). Dabei wird aber die gesamte auf den bewegten Spiegel fallende Strahlung einer bestimmten Schwingungszahl ν keineswegs wieder als monochromatische Strahlung reflektiert, sondern die Farbenänderung bei der Reflexion hängt wesentlich mit von dem Einfallswinkel ϑ ab. Daher kann man von einer bestimmten spektralen „Verschiebung" der Farbe nur bei einem einzelnen bestimmt gerichteten Strahlenbündel, dagegen bei der gesamten monochromatischen Strahlung höchstens von einer spektralen „Zersplitterung" reden. Die Farbenänderung ist am größten für normale Inzidenz, sie verschwindet ganz für streifende Inzidenz.

§ 77. Berechnen wir zweitens die Energieänderung, welche der bewegte Spiegel der auftreffenden Strahlung erteilt, und zwar gleich für den allgemeinen Fall der schiefen Inzidenz. Ein monochromatisches unendlich dünnes unpolarisiertes Strahlenbündel, welches unter dem Einfallswinkel ϑ auf ein Flächenelement des Spiegels trifft, möge in der Zeit δt die Energie $I \cdot \delta t$ auf den Spiegel fallen lassen. Dann beträgt die mechanische Druckkraft des Strahlenbündels normal auf den Spiegel nach Gleichung (64) bis auf verschwindend kleine Größen:

$$\mathfrak{F} = \frac{2 \cos \vartheta}{c} \cdot I$$

und die bei der Bewegung des Spiegels in der Zeit δt von außen gegen die auftreffende Strahlung geleistete Arbeit ist mit demselben Grade der Annäherung:

$$\mathfrak{F}\, v\, \delta t = \frac{2 v \cos \vartheta}{c} \cdot I\, \delta t. \qquad (84)$$

Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie muß sich dieser Arbeitsbetrag in der Energie der reflektierten Strahlung wiederfinden. Daher besitzt das reflektierte Strahlenbündel eine größere Intensität als das auffallende, es liefert nämlich in der Zeit δt die Energie:[1]

[1] Es versteht sich, daß die durch die Bewegung des Spiegels verursachte Intensitätsänderung bei der Reflexion sich auch rein elektro-

$$I\,\delta t + \mathfrak{F}\,v\,\delta t = I\left(1 + \frac{2\,v\cos\vartheta}{c}\right)\delta t = I'\,\delta t. \tag{85}$$

Man kann also zusammenfassend sagen: Durch die Reflexion eines unter dem Einfallswinkel ϑ auftreffenden monochromatischen unpolarisierten Elementarstrahlenbündels an dem gegen die Strahlung mit der unendlich kleinen Geschwindigkeit v bewegten Spiegel wird während der Zeit δt die Strahlungsenergie $I\,\delta t$, deren Schwingungszahlen von ν bis $\nu + d\nu$ reichen, in die Strahlungsenergie $I'\,\delta t$ mit dem Schwingungsintervall $(\nu', \nu' + d\nu')$ verwandelt, wobei I' durch (85), ν' durch (83) und dementsprechend $d\nu'$, die Spektralbreite des reflektierten Bündels, durch:

$$d\nu' = d\nu\left(1 + \frac{2\,v\cos\vartheta}{c}\right) \tag{86}$$

gegeben ist. Ein Vergleich dieser Werte zeigt, daß

$$\frac{I'}{I} = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{d\nu'}{d\nu}. \tag{87}$$

Der absolute Betrag der bei dieser Verwandlung verschwundenen Strahlungsenergie ist nach Gleichung (13):

$$I\cdot\delta t = 2\,\mathfrak{K}_\nu\,d\sigma\,\cos\vartheta\;d\Omega\,d\nu\,\delta t \tag{88}$$

und daher der absolute Betrag der dabei neu entstandenen Strahlungsenergie nach (85):

$$I'\cdot\delta t = 2\,\mathfrak{K}_\nu\,d\sigma\,\cos\vartheta\,d\Omega\,d\nu\left(1 + \frac{2\,v\cos\vartheta}{c}\right)\delta t. \tag{89}$$

In diesen beiden Ausdrücken wäre streng genommen noch eine unendlich kleine Korrektur anzubringen, da I die Energiestrahlung auf ein ruhendes Flächenelement $d\sigma$ darstellt, während doch durch die Bewegung von $d\sigma$ gegen das auftreffende Strahlenbündel die auffallende Strahlung etwas vermehrt wird. Indessen können die entsprechenden Zusatzglieder hier ohne merklichen Fehler fortgelassen werden, weil die Differenz der beiden Ausdrücke: $(I' - I)\,\delta t$, welche durch (84) dargestellt wird, von jener Korrektur offenbar nicht merklich betroffen wird.

---

dynamisch ableiten läßt, da ja die Elektrodynamik mit dem Energieprinzip in Übereinstimmung ist. Dieser Weg ist etwas umständlicher, dafür gewährt er aber einen tieferen Einblick in die Einzelheiten des Vorgangs der Reflexion.

§ 78. Was endlich die Richtungsänderungen betrifft, welche den auftreffenden Strahlen durch die Reflexion an dem bewegten Spiegel erteilt werden, so brauchen wir uns der Berechnung derselben hier gar nicht zu unterziehen. Denn wenn die Bewegung des Spiegels nur hinreichend langsam erfolgt, so werden alle Ungleichmäßigkeiten in der Richtung der Strahlung sogleich wieder durch die weitere Reflexion an den Gefäßwänden ausgeglichen werden. Wir können uns ja den ganzen Prozeß in sehr vielen kleinen Intervallen ausgeführt denken, in der Weise, daß der Kolben, nachdem er eine sehr kleine Wegstrecke mit sehr kleiner Geschwindigkeit zurückgelegt hat, eine Zeitlang in Ruhe gehalten wird, und zwar so lange, bis alle etwa entstandenen Ungleichmäßigkeiten in den Strahlungsrichtungen durch die Reflexion an den weißen Wänden des Hohlzylinders wieder zum Verschwinden gebracht sind. Wenn man dies Verfahren genügend lange fortsetzt, so kann man die Kompression der Strahlung bis zu einem beliebig kleinen Bruchteil des ursprünglichen Volumens fortsetzen, und dabei stets die Strahlung als nach allen Richtungen gleichmäßig betrachten. Dieser stetig wirkende Ausgleichungsprozeß betrifft natürlich nur die Verschiedenheit der Strahlungsrichtungen; denn Farben- und Intensitätsänderungen der Strahlung, die einmal eingetreten sind, wenn auch noch so minimaler Größe, können offenbar durch Reflexion an total reflektierenden ruhenden Wänden mit der Zeit niemals ausgeglichen werden, sondern bleiben konstant weiter bestehen.

§ 79. Mit Hilfe der gewonnenen Sätze sind wir nun imstande, für den Fall der unendlich langsamen adiabatischen Kompression des von gleichmäßiger Strahlung erfüllten vollkommen evakuierten Hohlzylinders die Änderung der Strahlungsdichte für jede einzelne Schwingungszahl zu berechnen. Wir fassen zu diesem Zwecke die Strahlung innerhalb eines bestimmten unendlich kleinen Intervalls von Schwingungszahlen, nämlich von ν bis $\nu + d\nu$, zur Zeit t ins Auge, und fragen nach der Änderung, welche die gesamte Strahlungsenergie, die in dieses bestimmte unveränderliche Intervall fällt, während der Zeit δt erleidet.

Zur Zeit t ist diese Strahlungsenergie nach (22) $V\mathfrak{u} \cdot d\nu$, zur Zeit $t + \delta t$ ist sie $\big(V\mathfrak{u} + \delta(V\mathfrak{u})\big) \cdot d\nu$, also die zu berechnende Änderung:

(90) $$\delta(V\mathfrak{u})\cdot dv.$$

Die monochromatische Strahlungsdichte $\mathfrak{u}$ ist hierbei als Funktion der beiden voneinander unabhängigen Variabeln v und t zu betrachten, deren Differentiale durch die Zeichen d und δ unterschieden sind.

Die Änderung der monochromatischen Strahlungsenergie kommt lediglich bei der Reflexion an dem bewegten Spiegel, und zwar dadurch zustande, daß erstens gewisse Strahlen, welche zur Zeit t dem Intervall (v, dv) angehören, durch die bei der Reflexion erlittene Farbenänderung aus diesem Intervall austreten, und daß zweitens gewisse Strahlen, welche zur Zeit t nicht dem Intervall (v, dv) angehören, durch die bei der Reflexion erlittene Farbenänderung in dieses Intervall eintreten. Wir berechnen beide Einflüsse nacheinander. Die Berechnung wird wesentlich vereinfacht, wenn wir die Breite dieses Intervalls: dv so klein nehmen, daß:

(91) $$dv \text{ klein gegen } \frac{v}{c}\cdot v,$$

was deshalb möglich ist, weil dv und v gar nicht voneinander abhängen.

§ 80. Die Strahlen, welche zur Zeit t dem Intervall (v, dv) angehören und in der Zeit δt infolge der Reflexion am bewegten Spiegel aus diesem Intervall austreten, sind einfach alle diejenigen, welche während der Zeit δt den bewegten Spiegel treffen. Denn die Farbenänderung, die ein solcher Strahl erleidet, ist nach (83) und (91) groß gegen die Breite dv des ganzen Intervalls. Wir haben hier also nur die Energie zu berechnen, welche während der Zeit δt durch die Strahlen des Intervalls (v, dv) auf den Spiegel geworfen wird.

Für ein Elementarstrahlenbündel, das unter dem Einfallswinkel ϑ auf das Element $d\sigma$ der Spiegelfläche fällt, ist diese Energie nach (88) und (5):

$$I\,\delta t = 2\mathfrak{K}_v\, d\sigma \cos\vartheta\, d\Omega\, dv\, \delta t = 2\mathfrak{K}_v\, d\sigma \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dv\, \delta t,$$

also für die gesamte monochromatische Strahlung, die auf die ganze Spiegelfläche F auffällt, durch Integration über φ von 0 bis 2π, über ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, und über $d\sigma$ von 0 bis F:

(92) $$2\pi F\,\mathfrak{K}_v\, dv\, \delta t.$$

Diese Strahlungsenergie tritt also während der Zeit δt aus dem betrachteten Schwingungszahlintervall $(\nu, d\nu)$ heraus.

§ 81. Bei der Berechnung derjenigen Strahlungsenergie, welche während der Zeit δt durch die Reflexion an dem bewegten Spiegel in das Intervall $(\nu, d\nu)$ eintritt, müssen wir die unter verschiedenen Einfallswinkeln auf den Spiegel treffenden Strahlen gesondert betrachten. Da bei positivem v die Schwingungszahl durch die Reflexion vergrößert wird, so besitzen die hier zu betrachtenden Strahlen zur Zeit t eine Schwingungszahl $\nu_1 < \nu$. Nehmen wir nun zur Zeit t ein monochromatisches Strahlenbündel vom Schwingungsintervall $(\nu_1, d\nu_1)$, welches unter dem Einfallswinkel ϑ auf den Spiegel trifft, so wird es durch die Reflexion immer und nur dann in das Intervall $(\nu, d\nu)$ eintreten, wenn

$$\nu = \nu_1 \left(1 + \frac{2v\cos\vartheta}{c}\right) \quad \text{und} \quad d\nu = d\nu_1 \left(1 + \frac{2v\cos\vartheta}{c}\right).$$

Diese Beziehungen ergeben sich, wenn man in die Gleichungen (83) und (86) an die Stelle von ν und ν', der Schwingungszahlen vor der Reflexion und nach der Reflexion, beziehungsweise ν_1 und ν setzt.

Die Energie, welche dieses Strahlenbündel während der Zeit δt in das Intervall $(\nu, d\nu)$ hineinbringt, ergibt sich aus (89), wenn man darin ebenfalls ν_1 an die Stelle von ν setzt, zu:

$$2\,\mathfrak{K}_{\nu_1}\, d\sigma\, \cos\vartheta\, d\Omega\, d\nu_1 \left(1 + \frac{2v\cos\vartheta}{c}\right) \delta t = 2\,\mathfrak{K}_{\nu_1}\, d\sigma\, \cos\vartheta\, d\Omega\, d\nu\, \delta t.$$

Nun ist:

$$\mathfrak{K}_{\nu_1} = \mathfrak{K}_\nu + (\nu_1 - \nu) \cdot \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \nu} + \ldots,$$

wobei wir voraussetzen, daß $\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \nu}$ endlich ist. Also bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung:

$$\mathfrak{K}_{\nu_1} = \mathfrak{K}_\nu - \frac{2\nu v\cos\vartheta}{c} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \nu}.$$

Dadurch wird die gesuchte Energie:

$$2\,d\sigma \left(\mathfrak{K}_\nu - \frac{2\nu v\cos\vartheta}{c} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \nu}\right) \sin\vartheta\, \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\nu\, \delta t,$$

und durch Integration dieses Ausdrucks über $d\sigma$, φ und ϑ, wie oben, ergibt sich die gesamte Strahlungsenergie, welche während

der Zeit δt in das Schwingungszahlintervall $(\nu, d\nu)$ neu eintritt:

$$2\pi F\left(\mathfrak{K}_\nu - \frac{4}{3}\frac{\nu v}{c}\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \nu}\right) d\nu\, \delta t. \tag{93}$$

§ 82. Die Differenz der Ausdrücke (93) und (92) ergibt die gesamte Änderung (90), also:

$$-\frac{8\pi}{3} F \frac{\nu v}{c}\frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \nu}\delta t = \delta(V u)$$

oder nach (24):

$$-\frac{1}{3} F \nu v \frac{\partial u}{\partial \nu}\delta t = \delta(V u)$$

oder endlich, da $F v\, \delta t$ gleich ist der Abnahme des Volumens V:

$$\frac{1}{3}\nu\frac{\partial u}{\partial \nu}\delta V = \delta(V u) = u\,\delta V + V\,\delta u, \tag{94}$$

woraus folgt:

$$\delta u = \left(\frac{\nu}{3}\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\right)\cdot\frac{\delta V}{V}. \tag{95}$$

$T^3 V = \text{const.}$

Diese Gleichung ergibt die bei einer unendlich langsamen adiabatischen Kompression der Strahlung eintretende Änderung der räumlichen Energiedichte irgend einer bestimmten Schwingungszahl ν. Sie gilt übrigens, wie die Art ihrer Ableitung zeigt, nicht allein für schwarze Strahlung, sondern für eine Strahlung von anfänglich ganz beliebiger Energieverteilung.

Da die während der Zeit δt im Strahlungszustand eintretenden Änderungen der unendlich kleinen Geschwindigkeit v proportional sind und mit deren Vorzeichen sich umkehren, so gilt die Gleichung für jedes Vorzeichen von δV, der Vorgang ist also reversibel.

§ 83. Bevor wir zur allgemeinen Integration der Gleichung (95) schreiten, wollen wir sie einer naheliegenden Prüfung unterziehen. Nach dem Energieprinzip muß nämlich die bei der adiabatischen Kompression eintretende Änderung der gesamten Strahlungsenergie:

$$U = V\cdot u = V\cdot\int_0^\infty u\, d\nu$$

gleich sein der bei der Kompression von außen gegen den Strahlungsdruck geleisteten Arbeit:

$$-p\,\delta V = -\frac{u}{3}\delta V = -\frac{\delta V}{3}\int_0^\infty u\, d\nu. \tag{96}$$

Nun ergibt sich mit Benutzung von (94) für die Änderung der Gesamtenergie:

$$\delta U = \int_0^\infty d\nu \cdot \delta(V\mathfrak{u}) = \frac{\delta V}{3} \cdot \int_0^\infty \nu \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \nu} d\nu$$

oder durch partielle Integration:

$$\delta U = \frac{\delta V}{3} \cdot \left([\nu \mathfrak{u}]_0^\infty - \int_0^\infty \mathfrak{u}\, d\nu \right)$$

und dieser Ausdruck ist in der Tat mit (96) identisch, da das Produkt $\nu \mathfrak{u}$ sowohl für $\nu = 0$ als auch für $\nu = \infty$ verschwindet. Letzteres könnte einen Augenblick zweifelhaft erscheinen; man ersieht aber leicht, daß, wenn $\nu \mathfrak{u}$ für $\nu = \infty$ einen von Null verschiedenen Wert annähme, dann das Integral von $\mathfrak{u}$ nach ν, von 0 bis ∞ genommen, keinen endlichen Wert besitzen könnte, was doch sicher der Fall ist.

§ 84. Wir haben schon oben in § 79 hervorgehoben, daß $\mathfrak{u}$ als Funktion zweier unabhängiger Variabeln anzusehen ist, von denen wir als erste die Schwingungszahl ν, als zweite die Zeit t genommen haben. Da nun die Zeit t in der Gleichung (95) explicite gar nicht vorkommt, so ist es sachgemäßer, als zweite unabhängige Variable statt t direkt das Volumen V einzuführen, welches ja von t allein abhängig ist. Dann schreibt sich die Gleichung (95) folgendermaßen als partielle Differentialgleichung:

$$V \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial V} = \frac{\nu}{3} \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \nu} - \mathfrak{u}, \tag{97}$$

aus welcher $\mathfrak{u}$, wenn es für ein bestimmtes V als Funktion von ν bekannt ist, für alle anderen Werte von V als Funktion von ν berechnet werden kann. Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung lautet, wie man sich leicht durch nachträgliche Substitution überzeugen kann:

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{V} \varphi(\nu^3 V), \tag{98}$$

wobei φ eine beliebige Funktion eines einzigen Arguments $\nu^3 V$ bedeutet. Statt dessen kann man auch schreiben, indem man $\nu^3 V \cdot \varphi(\nu^3 V)$ statt $\varphi(\nu^3 V)$ einsetzt:

$$\mathfrak{u} = \nu^3 \varphi(\nu^3 V). \tag{99}$$

Jede der beiden letzten Gleichungen ist der allgemeine Ausdruck des WIENschen Verschiebungsgesetzes.

Wenn also für ein bestimmtes gegebenes Volumen V die spektrale Energieverteilung, d. h. u als Funktion von ν, bekannt ist, so läßt sich daraus die Abhängigkeit der Funktion φ von ihrem Argument ableiten, und dadurch ergibt sich dann unmittelbar die Energieverteilung für jedes beliebige andere Volumen V, in welches die den Hohlzylinder erfüllende Strahlung durch einen reversibeln adiabatischen Prozeß gebracht wird.

§ 85. Nun führen wir, zu dem Gedankengang des § 73 zurückkehrend, die Voraussetzung ein, daß am Anfang die spektrale Energieverteilung die normale, der schwarzen Strahlung entsprechende ist. Dann behält nach dem damals bewiesenen Satze die Strahlung bei der reversibeln adiabatischen Volumenänderung diese Eigenschaft unverändert bei, und es gelten für den Prozeß alle in § 68 abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten. Die Strahlung besitzt also dann in jedem Zustand eine bestimmte Temperatur T, welche mit dem Volumen V durch die dort abgeleitete Gleichung:

(100) $$T^3 \cdot V = \text{const}$$

zusammenhängt. Daher kann man nun die Gleichung (99) auch so schreiben:

$$u = \nu^3 \varphi\left(\frac{\nu^3}{T^3}\right)$$

oder auch: $$u = \nu^3 \varphi\left(\frac{T}{\nu}\right).$$

Ist also für eine einzige Temperatur die spektrale Energieverteilung der schwarzen Strahlung, d. h. u als Funktion von ν, bekannt, so ergibt sich daraus die Abhängigkeit der Funktion φ von ihrem Argument, und dadurch die spektrale Energieverteilung für jede andere Temperatur.

Nimmt man noch den in § 47 bewiesenen Satz hinzu, daß bei der schwarzen Strahlung einer bestimmten Temperatur das Produkt $u q^3$ für alle Medien den nämlichen Wert hat, so kann man auch schreiben:

(101) $$u = \frac{\nu^3}{c^3} F\left(\frac{T}{\nu}\right),$$

wo nun die Funktion F die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht mehr enthält.

§ 86. Für die gesamte räumliche Strahlungsdichte der schwarzen Strahlung im Vakuum ergibt sich:

$$u = \int_0^\infty \mathfrak{u}\, d\nu = \frac{1}{c^3} \int_0^\infty \nu^3 F\left(\frac{T}{\nu}\right) d\nu$$

oder, wenn man statt ν die Größe $\frac{T}{\nu} = x$ als Integrationsvariable einführt:

$$u = \frac{T^4}{c^3} \int_0^\infty \frac{F(x)}{x^5}\, dx\,.$$

Setzt man die absolute Konstante:

$$\frac{1}{c^3} \int_0^\infty \frac{F(x)}{x^5}\, dx = a\,,$$

so kehrt man damit zu der in Gleichung (75) ausgesprochenen Form des Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetzes zurück.

§ 87. Eine anschauliche Fassung gewinnt die Gleichung (101), wenn man sie in folgender Form schreibt:

$$\frac{\mathfrak{u}\, c^3}{\nu^3}\, d\nu = F\left(\frac{T}{\nu}\right) d\nu = \eta \qquad (102)$$

und bedenkt, daß der Ausdruck links die in dem Kubus einer Wellenlänge λ enthaltene Strahlungsenergie zwischen den Schwingungszahlen ν und $\nu + d\nu$ darstellt, die wir vorübergehend mit η bezeichnen wollen. Wenn nun durch reversible adiabatische Kompression die Strahlung auf die höhere Temperatur T' übergeht, so ist für ein beliebiges anderes, von ν' bis $\nu' + d\nu'$ reichendes Spektralgebiet:

$$\eta' = F\left(\frac{T'}{\nu'}\right) d\nu'\,. \qquad (103)$$

Setzen wir nun

$$\nu' = \frac{T'}{T}\,\nu \qquad (104)$$

und entsprechend:

$$d\nu' = \frac{T'}{T}\,\nu\,,$$

d. h. fassen wir im zweiten Zustand solche Schwingungszahlen ν' ins Auge, die sich im Verhältnis der Temperaturen von den ursprünglichen Schwingungszahlen ν unterscheiden, so ergibt sich durch Division von (103) und (102):

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{d\nu'}{d\nu} = \frac{T'}{T}\,. \qquad (105$$

Ferner durch Berücksichtigung der Bedeutung von η:

$$\mathfrak{u}' : \mathfrak{u} = T'^3 : T^3$$

und:

$$\mathfrak{u}'\, d\nu' : \mathfrak{u}\, d\nu = T'^4 : T^4.$$

Man kann also folgende Sätze aussprechen. Das Spektrum der schwarzen Strahlung verändert sich beim Übergang von der Temperatur T zu einer höheren Temperatur T' derartig, als ob alle Schwingungszahlen ν sich im Verhältnis der Temperaturen T' und T vergrößern, und dabei die im Kubus einer Wellenlänge λ enthaltene Energie η der Strahlung eines unendlich kleinen Spektralbezirks sich ebenfalls in demselben Verhältnis vergrößert. Die monochromatische Strahlungsdichte $\mathfrak{u}$ vergrößert sich dann im Verhältnis der dritten Potenz, und die Strahlungsdichte $\mathfrak{u}\, d\nu$ eines unendlich kleinen Spektralbezirks im Verhältnis der vierten Potenz der Temperaturen. Für die gesamte räumliche Strahlungsdichte u, als der Summe der Strahlungsdichten aller Spektralbezirke, ergibt sich dann wieder das Stefan-Boltzmannsche Gesetz.

Da ferner nach (104) und (100):

$$\frac{\nu^3 V}{c^3} = \frac{\nu'^3 V'}{c^3},$$

so wird bei dieser Veränderung die im ganzen Volumen V der Strahlung enthaltene Anzahl von Wellenkuben einer jeden Schwingungszahl durch die Kompression nicht geändert.

Diese Sätze haben natürlich nur zusammenfassende Bedeutung; denn wie wir oben gesehen haben, verändern sich in Wirklichkeit bei der adiabatischen Kompression die Schwingungszahlen ν der einzelnen Strahlen durchaus nicht alle, sondern nur insofern sie während der Kompression an dem bewegten Kolben reflektiert werden, und dann auch nicht gleichmäßig, sondern je nach der Größe des Einfallswinkels in verschiedener Weise.

§ 88. Wie für die räumliche Strahlungsdichte $\mathfrak{u}$, so läßt sich das Wiensche Verschiebungsgesetz auch für die spezifische Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ eines geradlinig polarisierten monochromatischen Strahles bei der schwarzen Strahlung aussprechen, und lautet nach (24) in dieser Form:

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{\nu^3}{c^3} F\left(\frac{T}{\nu}\right). \tag{106}$$

Bezieht man die Strahlungsintensität, wie es in der Experimental-

physik meistens geschieht, statt auf Schwingungszahlen ν, auf die Wellenlänge λ, setzt also nach (16):

$$E_\lambda = \frac{c \cdot \Re_\nu}{\lambda^2},$$

so nimmt die letzte Gleichung die Form an:

$$E_\lambda = \frac{c^2}{\lambda^5} \cdot F\left(\frac{\lambda T}{c}\right). \tag{107}$$

Diese Form des Wienschen Verschiebungsgesetzes hat meistens den Ausgangspunkt zur experimentellen Prüfung gebildet, welche in allen Fällen zu einer merklichen Bestätigung des Gesetzes geführt hat.[1]

§ 89. Da E_λ sowohl für $\lambda = 0$ als auch für $\lambda = \infty$ verschwindet, so besitzt E_λ in bezug auf λ ein Maximum, welches sich aus der Gleichung ergibt:

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda} = 0 = -\frac{5}{\lambda^6} F\left(\frac{\lambda T}{c}\right) + \frac{1}{\lambda^5}\frac{T}{c} \dot{F}\left(\frac{\lambda T}{c}\right),$$

wobei $\dot{F}$ den Differentialquotienten von F nach seinem Argument bedeutet. Oder:

$$\frac{\lambda T}{c} \dot{F}\left(\frac{\lambda T}{c}\right) - 5\, F\left(\frac{\lambda T}{c}\right) = 0. \tag{108}$$

Diese Gleichung ergibt für das Argument $\frac{\lambda T}{c}$ einen ganz bestimmten Wert, so daß für die Wellenlänge λ_m des Maximums der Strahlungsintensität E_λ die Beziehung gilt:

$$\lambda_m T = b. \tag{109}$$

Das Strahlungsmaximum verschiebt sich also bei Erhöhung der Temperatur nach der Seite der kürzeren Wellenlängen.

Der Zahlenwert der Konstante b ist von Lummer und Pringsheim[2] gemessen worden zu:

$$b = 0{,}294 \text{ cm} \cdot \text{grad}. \tag{110}$$

Paschen[3] hat einen etwas kleineren Wert gefunden, etwa 0,292.

---

[1] F. Paschen, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. Berlin, p. 405 u. 959, 1899. O. Lummer und E. Pringsheim, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **1**, p. 23 u. 215, 1899. Drudes Ann. **6**, p. 192, 1901.

[2] O. Lummer und E. Pringsheim, a. a. O.

[3] F. Paschen, Drudes Ann. **6**, p. 657, 1901.

Es sei hier übrigens noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß nach § 19 das Maximum von E_λ keineswegs auf dieselbe Stelle im Spektrum fällt wie das Maximum von $\mathfrak{K}_\nu$, und daß daher die Bedeutung der Konstante b wesentlich mit dadurch bedingt ist, daß die Intensität der monochromatischen Strahlung auf Wellenlängen und nicht auf Schwingungszahlen bezogen wird.

§ 90. Auch der Betrag des Maximums von E_λ ergibt sich aus (107), wenn man darin $\lambda = \lambda_m$ einsetzt. Dann erhält man unter Berücksichtigung von (109):

$$E_{max} = \text{const} \cdot T^5, \tag{111}$$

d. h. der Betrag des Strahlungsmaximums im Spektrum der schwarzen Strahlung ist proportional der fünften Potenz der absoluten Temperatur.

Würde man die Intensität der monochromatischen Strahlung nicht durch E_λ, sondern durch $\mathfrak{K}_\nu$ messen, so erhielte man für den Betrag des Strahlungsmaximums ein ganz anderes Gesetz, nämlich:

$$\mathfrak{K}_{max} = \text{const} \cdot T^3. \tag{112}$$

Viertes Kapitel. Strahlung von beliebiger spektraler Energieverteilung. Entropie und Temperatur monochromatischer Strahlung.

§ 91. Wir hatten das Wiensche Verschiebungsgesetz bisher nur auf den Fall der schwarzen Strahlung angewendet; dasselbe besitzt aber eine noch viel allgemeinere Bedeutung. Denn die Gleichung (95) gibt, wie schon dort bemerkt wurde, für jede beliebige anfängliche spektrale Verteilung der im evakuierten Hohlraum befindlichen nach allen Richtungen gleichmäßigen Energiestrahlung die Änderung dieser Energieverteilung bei einer reversibeln adiabatischen Änderung des Gesamtvolumens. Jeder durch einen derartigen Prozeß herbeigeführte Strahlungszustand ist vollkommen stationär und kann unbegrenzte Zeiten lang fortbestehen, allerdings nur unter der Bedingung, daß keine Spur emittierender und absorbierender Substanz in dem Strahlungsraum vorhanden ist. Denn sonst würde sich nach § 51 durch den auslösenden Einfluß der Substanz mit der Zeit die Energieverteilung auf irreversible Weise, d. h. unter Vermehrung

der Gesamtentropie, in die stabile, der schwarzen Strahlung entsprechende Verteilung verwandeln.

Der Unterschied dieses allgemeineren Falles gegen den im vorigen Kapitel behandelten speziellen ist der, daß man hier nicht mehr, wie bei der schwarzen Strahlung, von einer bestimmten Temperatur der Strahlung reden kann. Wohl aber besitzt, da der zweite Hauptsatz der Thermodynamik als allgemein gültig vorausgesetzt wird, die Strahlung, wie überhaupt jedes in einem bestimmten Zustand befindliche physikalische System, eine bestimmte Entropie $S = V \cdot s$, und diese Entropie setzt sich, da die einzelnen Strahlengattungen unabhängig voneinander sind, durch Addition aus den Entropien der monochromatischen Strahlungen zusammen, also:

$$s = \int_0^\infty \mathfrak{s}\, d\nu, \qquad S = V \cdot \int_0^\infty \mathfrak{s}\, d\nu, \tag{113}$$

wobei $\mathfrak{s}\, d\nu$ die Entropie der in der Volumeneinheit enthaltenen Strahlung zwischen den Schwingungszahlen ν und $\nu + d\nu$ bezeichnet. $\mathfrak{s}$ ist eine bestimmte Funktion der beiden unabhängigen Veriabeln ν und u, und wird im folgenden stets als solche behandelt werden.

§ 92. Würde der analytische Ausdruck der Funktion $\mathfrak{s}$ bekannt sein, so könnte man daraus unmittelbar das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum ableiten; denn unter allen spektralen Energieverteilungen ist ja die normale, oder die der schwarzen Strahlung, dadurch ausgezeichnet, daß sie das Maximum der Strahlungsentropie S aufweist.

Nehmen wir also einmal $\mathfrak{s}$ als bekannte Funktion von ν und u an, so ergibt sich als Bedingung der schwarzen Strahlung:

$$\delta S = 0 \tag{114}$$

für alle beliebigen Variationen der Energieverteilung, welche bei konstantem Gesamtvolumen V und konstanter Gesamtenergie U der Strahlung möglich sind. Die Variation der Energieverteilung denken wir uns dadurch charakterisiert, daß die Energie u jeder einzelnen bestimmten Schwingungszahl ν eine unendlich kleine Änderung δu erleidet. Dann haben wir als feste Bedingungen:

$$\delta V = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \delta \mathrm{u} \cdot d\nu = 0. \tag{115}$$

Die Änderungen d und δ sind natürlich ganz unabhängig voneinander.

Nun ist nach (114) und (113), da $\delta V = 0$:

$$\int_0^\infty \delta \mathfrak{s} \cdot dv = 0$$

oder, da v unvariiert bleibt:

$$\int_0^\infty \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u} \delta u \cdot dv = 0$$

und die Gültigkeit dieser Gleichung für alle beliebigen Werte von δu erfordert mit Rücksicht auf (115), daß

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u} = \text{const} \tag{116}$$

für alle verschiedenen Schwingungszahlen. Diese Gleichung spricht das Gesetz der Energieverteilung bei der schwarzen Strahlung aus.

§ 93. Die Konstante der Gleichung (116) steht in einfachem Zusammenhang mit der Temperatur der schwarzen Strahlung. Denn wenn die schwarze Strahlung bei konstantem Volumen V durch Zuleitung einer gewissen Wärmemenge eine unendlich kleine Energieänderung δU erfährt, so ist nach (73) die Änderung ihrer Entropie:

$$\delta S = \frac{\delta U}{T}.$$

Nun ist aber nach (113) und (116):

$$\delta S = V \int_0^\infty \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u} \delta u \, dv = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u} V \int_0^\infty \delta u \, dv = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u} \cdot \delta U,$$

folglich ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u} = \frac{1}{T} \tag{117}$$

und die obige Größe, welche bei der schwarzen Strahlung als für alle Schwingungszahlen gleich gefunden wurde, erweist sich als die reziproke Temperatur der schwarzen Strahlung.

Durch diesen Satz erhält der Begriff der Temperatur eine Bedeutung auch für Strahlungen von ganz beliebiger Energieverteilung. Denn da $\mathfrak{s}$ nur von u und v abhängt, so besitzt

eine nach allen Richtungen gleichmäßige monochromatische Strahlung, welche eine bestimmte Energiedichte u hat, auch eine ganz bestimmte, durch (117) gegebene Temperatur, und unter allen denkbaren Energieverteilungen ist die normale dadurch charakterisiert, daß die Strahlungen aller Schwingungszahlen die nämliche Temperatur haben.

Jede Änderung der Energieverteilung besteht in einem Energieübergang von einer monochromatischen Strahlung auf eine andere, und je nachdem die Temperatur der ersten oder die der zweiten Strahlung höher ist, bedingt der Energieübergang eine Vermehrung oder eine Verminderung der Gesamtentropie, ist also in der Natur ohne Kompensation möglich oder nicht ohne Kompensation möglich, gerade wie das bei dem Wärmeübergang zwischen zwei verschieden temperierten Körpern zutrifft.

§ 94. Wir wollen nun sehen, was das WIENsche Verschiebungsgesetz über die Abhängigkeit der Größe $\mathfrak{s}$ von den Variabeln u und ν aussagt. Aus der Gleichung (101) folgt, wenn man sie nach T auflöst und dafür den in (117) gegebenen Wert einsetzt:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\nu} F\left(\frac{c^3 u}{\nu^3}\right) = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial u}, \tag{118}$$

wo F wieder eine gewisse Funktion eines einzigen Arguments darstellt, deren Konstante die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c nicht enthalten. Nach dem Argument integriert ergibt dies bei analoger Bezeichnung:

$$\mathfrak{s} = \frac{\nu^3}{c} F\left(\frac{c^3 u}{\nu^3}\right). \tag{119}$$

In dieser Form besitzt das WIENsche Verschiebungsgesetz für jede monochromatische Strahlung einzeln, und dadurch auch für Strahlungen von beliebiger Energieverteilung, Bedeutung.

§ 95. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik muß die Gesamtentropie einer Strahlung von ganz beliebiger Energieverteilung bei reversibler adiabatischer Kompression konstant bleiben. Den direkten Nachweis dieses Satzes können wir jetzt in der Tat auf Grund der Gleichung (119) führen. Es ist nämlich für einen solchen Vorgang nach Gleichung (113):

$$\delta S = \int_0^\infty d\nu (V\,\delta \mathfrak{z} + \mathfrak{z}\,\delta V)$$

$$= \int_0^\infty d\nu \left(V \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u} \delta u + \mathfrak{z}\,\delta V \right). \tag{120}$$

Hier ist $\mathfrak{z}$, wie stets, als Funktion von u und ν zu betrachten.

Nun gilt für eine reversible adiabatische Zustandsänderung die Beziehung (95), aus welcher wir den Wert von δu entnehmen, so daß sich ergibt:

$$\delta S = \delta V \cdot \int_0^\infty d\nu \left\{ \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u} \left(\frac{\nu}{3} \frac{du}{d\nu} - u \right) + \mathfrak{z} \right\}.$$

Dabei bezieht sich der Differentialquotient von u nach ν auf die in beliebiger Weise von vornherein gegebene spektrale Energieverteilung der Strahlung, er ist daher, im Gegensatz zu den partiellen Differentialquotienten, mit dem Buchstaben d bezeichnet.

Nun ist das vollständige Differential:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{d\nu} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u} \frac{du}{d\nu} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \nu},$$

folglich, durch Substitution:

$$\delta S = \delta V \cdot \int_0^\infty d\nu \left\{ \frac{\nu}{3} \left(\frac{d\mathfrak{z}}{d\nu} - \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \nu} \right) - u \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u} + \mathfrak{z} \right\}. \tag{121}$$

Aus Gleichung (119) folgt aber durch Differentiation:

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u} = \frac{1}{\nu} \dot{F}\left(\frac{c^3 u}{\nu^3} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \nu} = \frac{2\nu}{c^3} F\left(\frac{c^3 u}{\nu^3} \right) - \frac{3u}{\nu^2} \dot{F}\left(\frac{c^3 u}{\nu^3} \right).$$

Mithin:

$$\nu \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \nu} = 2\mathfrak{z} - 3u \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u}.$$

Dies in (121) eingesetzt, ergibt:

$$\delta S = \delta V \cdot \int_0^\infty d\nu \left(\frac{\nu}{3} \frac{d\mathfrak{z}}{d\nu} + \frac{1}{3} \mathfrak{z} \right)$$

oder:

$$\delta S = \frac{\delta V}{3} \cdot [\nu \mathfrak{z}]_0^\infty = 0,$$

wie es sein muß. Daß das Produkt $\nu \mathfrak{z}$ auch für $\nu = \infty$ verschwindet, läßt sich ebenso wie in § 83 bei dem Produkte νu beweisen.

§ 96. Mittels der Gleichung (119) kann man den Gesetzen der reversibeln adiabatischen Kompression eine anschaulische

Fassung geben, welche die Verallgemeinerung der in § 87 für die schwarze Strahlung ausgesprochenen Sätze auf eine Strahlung von beliebiger Energieverteilung bildet. Zu diesem Zwecke führen wir wieder die in dem Kubus einer Wellenlänge λ enthaltene Strahlungsenergie zwischen den Schwingungszahlen ν und $\nu + d\nu$ ein:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{u}\, c^3}{\nu^3}\, d\nu = \eta, \\ &\text{ferner die entsprechende Strahlungsentropie:} \\ &\frac{\mathfrak{s}\, c^3}{\nu^3}\, d\nu = \sigma, \end{aligned}\right\} \qquad (122)$$

endlich die in dem ganzen Strahlungsvolumen V enthaltene Anzahl von Wellenlängenkuben:

$$\frac{V\nu^3}{c^3} = N. \qquad (123)$$

Wenn nun die Strahlung, deren Energieverteilung eine ganz beliebige sein mag, durch reversible adiabatische Kompression auf ein kleineres Volumen V' gebracht wird, so ist für ein beliebiges anderes Intervall von Schwingungszahlen ν' und $\nu' + d\nu'$:

$$\eta' = \frac{\mathfrak{u}' c^3}{\nu'^3}\, d\nu', \qquad \sigma' = \frac{\mathfrak{s}' c^3}{\nu'^3}\, d\nu', \qquad (124)$$

$$N' = \frac{V'\nu'^3}{c^3}. \qquad (125)$$

Setzt man nun $N = N'$, also nach (123) und (125):

$$V \cdot \nu^3 = V'\nu'^3$$

und dementsprechend für die beiden Intervalle $d\nu$ und $d\nu'$:

$$V\nu^2\, d\nu = V'\nu'^2\, d\nu'$$

oder durch Division:

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{d\nu'}{\nu'},$$

so ergibt sich zunächst aus (99):

$$\frac{\mathfrak{u}'}{\nu'^3} = \frac{\mathfrak{u}}{\nu^3}$$

folglich, nach (122) und (124):

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{d\nu'}{d\nu} = \frac{\nu'}{\nu} \quad \text{und} \quad \sigma' = \sigma, \qquad (126)$$

da nach (119): $\qquad \frac{\mathfrak{s}'}{\nu'^3} = \frac{\mathfrak{s}}{\nu^3}.$

Daher kann man sagen: die reversible adiabatische Kompression einer Strahlung von beliebiger Energieverteilung erfolgt ebenso, als ob die Schwingungszahlen ν der einzelnen Farben sich in der Weise verändern, daß für jede Farbe die Anzahl der im ganzen Volumen enthaltenen Wellenlängenkuben bei der Kompression ungeändert bleibt. Die in einem solchen Kubus enthaltene monochromatische Strahlungsenergie η wächst dann proportional der Schwingungszahl ν, und ebenso wächst nach (118) die Temperatur T der betreffenden Strahlung, während dagegen die Entropie derselben σ konstant bleibt. Hiermit ist zugleich wiederum der Beweis geliefert, daß die Gesamtentropie der Strahlung, als die Summe der Entropien aller darin enthaltenen monochromatischen Strahlungen, konstant bleibt.

§ 97. Wir können noch einen Schritt weiter gehen, und von der Entropie $\mathfrak{s}$ und der Temperatur T einer nach allen Richtungen gleichmäßigen unpolarisierten monochromatischen Strahlung auf die Entropie und die Temperatur eines einzelnen geradlinig polarisierten monochromatischen Strahlenbündels schließen. Daß auch jedem einzelnen Strahlenbündel eine bestimmte Entropie zukommt, folgt nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik schon aus dem Phänomen der Emission. Denn da durch den Akt der Emission Körperwärme in Strahlungswärme verwandelt wird, so nimmt hierbei die Entropie des emittierenden Körpers ab, und dafür muß nach dem Satz der Vermehrung der Gesamtentropie als Kompensation eine andere Form der Entropie auftreten, welche durch nichts anderes bedingt sein kann als durch die Energie der emittierten Strahlung. Jedes einzelne geradlinig polarisierte monochromatische Strahlenbündel besitzt also seine bestimmte Entropie, die nur von seiner Energie und seiner Schwingungszahl abhängen kann, und sich mit ihm im Raume fortpflanzt und ausbreitet. Dadurch erhalten wir den Begriff der Entropiestrahlung, welche ganz analog der Energiestrahlung gemessen wird durch den Betrag der Entropie, die in der Zeiteinheit in einer bestimmten Richtung durch die Flächeneinheit hindurchgeht. Es gelten daher für die Entropiestrahlung genau dieselben Betrachtungen, wie die, welche wir vom § 14 an für die Energiestrahlung angestellt haben, indem jedes Strahlenbündel außer seiner Energie auch seine Entropie besitzt und befördert. Wir wollen, unter Hinweis

auf die dortigen Ausführungen, hier nur die wichtigsten Sätze für den späteren Gebrauch zusammenstellen.

§ 98. In einem von beliebiger Strahlung erfüllten Raume ist die Entropie, welche in der Zeit dt durch ein Flächenelement $d\sigma$ in der Richtung des Elementarkegels $d\Omega$ hindurchgestrahlt wird, gleich einem Ausdruck von der Form:

$$dt\, d\sigma \cos\vartheta\, d\Omega \cdot L = L \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, d\sigma\, dt. \quad (127)$$

Die positive Größe L nennen wir die „spezifische Intensität der Entropiestrahlung" am Orte des Flächenelements $d\sigma$ in der Richtung des Öffnungswinkels $d\Omega$. L ist im allgemeinen eine Funktion des Ortes, der Zeit und der Richtung.

Die Gesamtstrahlung der Entropie durch das Flächenelement $d\sigma$ nach einer Seite, etwa derjenigen, für welche der Winkel ϑ ein spitzer ist, ergibt sich durch Integration über φ von 0 bis 2π, und über ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu:

$$d\sigma\, dt \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, L \sin\vartheta \cos\vartheta.$$

Ist die Strahlung nach allen Richtungen gleichmäßig, also L konstant, so ist die Entropiestrahlung durch $d\sigma$ nach einer Seite:

$$\pi\, L\, d\sigma\, dt. \quad (128)$$

Die spezifische Intensität L der Entropiestrahlung nach jeder Richtung zerfällt weiter in die Intensitäten der einzelnen, den verschiedenen Gebieten des Spektrums angehörigen Strahlen, die sich unabhängig voneinander fortpflanzen. Endlich ist bei einem Strahle von bestimmter Farbe und Intensität noch die Art seiner Polarisation charakteristisch. Wenn ein monochromatischer Strahl von der Schwingungszahl ν aus zwei voneinander unabhängigen[1], senkrecht aufeinander polarisierten Komponenten mit den Intensitäten $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu'$, den „Hauptintensitäten" der Energie-

1) „unabhängig" im Sinne von „inkohärent". Ist z. B. der Strahl mit den Hauptintensitäten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ elliptisch polarisiert, so ist seine Entropie nicht gleich $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$, sondern gleich der Entropie eines geradlinig polarisierten Strahls von der Intensität $\mathfrak{K} + \mathfrak{K}'$. Denn ein elliptisch polarisierter Strahl läßt sich ohne weiteres in einen geradlinig polarisierten verwandeln und umgekehrt, z. B. mittels totaler Reflexion.

strahlung (§ 17) besteht, so ist die spezifische Intensität der Entropiestrahlung aller Schwingungszahlen von der Form:

$$L = \int_0^\infty d\nu\,(\mathfrak{L}_\nu + \mathfrak{L}_\nu'). \tag{129}$$

Hierbei sind die positiven Größen $\mathfrak{L}_\nu$ und $\mathfrak{L}_\nu'$, die „Hauptintensitäten" der Entropiestrahlung von der Schwingungszahl ν, durch die Werte von $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu'$ bestimmt. Durch Substitution in (127) erhält man hieraus für die Entropie, welche in der Zeit dt durch das Flächenelement $d\sigma$ in der Richtung des Elementarkegels $d\Omega$ hindurchgestrahlt wird, den Ausdruck

$$dt\,d\sigma\cos\vartheta\,d\Omega\int_0^\infty d\nu\,(\mathfrak{L}_\nu + \mathfrak{L}_\nu')$$

und für monochromatische geradlinig polarisierte Strahlung:

$$dt\,d\sigma\cos\vartheta\,d\Omega\,\mathfrak{L}_\nu\,d\nu = \mathfrak{L}_\nu\,d\nu\cdot\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,d\sigma\,dt. \tag{130}$$

Für unpolarisierte Strahlen ist $\mathfrak{L}_\nu = \mathfrak{L}_\nu'$, und aus (129) wird:

$$L = 2\int_0^\infty \mathfrak{L}_\nu\,d\nu.$$

Bei gleichmäßiger Strahlung nach allen Richtungen ergibt sich dann für die gesamte Entropiestrahlung nach einer Seite, gemäß (128)

$$2\pi\,d\sigma\,dt\cdot\int_0^\infty \mathfrak{L}_\nu\,d\nu.$$

§ 99. Aus der Intensität der fortschreitenden Entropiestrahlung ergibt sich auch der Ausdruck für die räumliche Dichte der Strahlungsentropie, ganz ebenso wie die räumliche Dichte der Strahlungsenergie aus der Intensität der fortschreitenden Energiestrahlung folgt. (Vgl. § 22.) Es ist nämlich, analog der Gleichung (20), die räumliche Dichte s der Strahlungsentropie im Vakuum in irgendeinem Punkte:

$$s = \frac{1}{c}\int L\,d\Omega, \tag{131}$$

wobei die Integration über die von dem Punkte nach allen Richtungen des Raumes ausgehenden Elementarkegel zu er-

strecken ist. Für gleichmäßige Strahlung ist L konstant, und man erhält:

$$s = \frac{4\pi L}{c}. \tag{132}$$

Durch spektrale Zerlegung der Größe L nach der Gleichung (129) ergibt sich aus (131) auch die räumliche Dichte der monochromatischen Strahlungsentropie:

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{c}\int (\mathfrak{L} + \mathfrak{L}') \cdot d\Omega$$

und für unpolarisierte und nach allen Richtungen gleichmäßige Strahlung:

$$\mathfrak{s} = \frac{8\pi \mathfrak{L}}{c}. \tag{133}$$

§ 100. Über die Art der Abhängigkeit der Entropiestrahlung $\mathfrak{L}$ von der Energiestrahlung $\mathfrak{K}$ gibt das Wiensche Verschiebungsgesetz in der Form (119) sogleich Auskunft. Es folgt nämlich daraus mit Berücksichtigung von (133) und (24):

$$\mathfrak{L} = \frac{\nu^2}{c^2} F\left(\frac{c^3 \mathfrak{K}}{\nu^3}\right) \tag{134}$$

und ferner, mit Berücksichtigung von (118):

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{K}} = \frac{1}{T}. \tag{135}$$

Daher auch:

$$T = \nu F\left(\frac{c^3 \mathfrak{K}}{\nu^3}\right), \tag{136}$$

oder:

$$\mathfrak{K} = \frac{\nu^3}{c^3} F\left(\frac{T}{\nu}\right). \tag{137}$$

Diese Beziehungen sind zwar, wie die Gleichungen (118) und (119), zunächst nur für unpolarisierte und nach allen Richtungen gleichmäßige Strahlung abgeleitet, sie besitzen aber auch im Falle beliebiger Strahlung allgemeine Gültigkeit für jeden einzelnen geradlinig polarisierten Strahl. Denn da sich die einzelnen Strahlen gänzlich unabhängig voneinander verhalten und fortpflanzen, so kann die Intensität $\mathfrak{L}$ der Entropiestrahlung eines Strahles auch nur von der Intensität der Energiestrahlung $\mathfrak{K}$ des nämlichen Strahles abhängen. Jeder einzelne monochromatische Strahl besitzt also außer seiner Energie auch seine durch (134) bestimmte Entropie und seine durch (136) bestimmte Temperatur.

§ 101. Die hier vorgenommene Erweiterung des Begriffs der Temperatur auf einen einzelnen monochromatischen Strahl bringt es mit sich, daß in einem von beliebigen Strahlen durchsetzten Medium an einer und derselben Stelle des Mediums im allgemeinen unendlich viele verschiedene Temperaturen bestehen, indem jeder einzelne Strahl, der diese Stelle trifft, seine besondere Temperatur besitzt, ja daß sogar die in der nämlichen Richtung fortschreitenden verschieden gefärbten Strahlen je nach der spektralen Energieverteilung verschiedene Temperaturen aufweisen. Zu allen diesen Temperaturen kommt schließlich noch die Temperatur des Mediums selber, welche auch ihrerseits von vornherein ganz unabhängig von der Temperatur der Strahlung ist. Diese Kompliziertheit der Betrachtungsweise liegt aber ganz in der Natur der Sache, und entspricht der Kompliziertheit der physikalischen Vorgänge in einem solcherweise durchstrahlten Medium. Nur im Falle des stabilen thermodynamischen Gleichgewichts gibt es nur eine einzige Temperatur, die dann dem Medium selber und allen dasselbe durchkreuzenden Strahlen verschiedener Richtung und verschiedener Farbe gemeinsam ist.

Auch in der praktischen Physik hat sich die Notwendigkeit, den Begriff der Strahlungstemperatur von dem der Körpertemperatur zu trennen, schon seit längerer Zeit geltend gemacht. So hat man es für vorteilhaft gefunden, neben der wirklichen Temperatur der Sonne von einer „scheinbaren“ oder „Effektiv“-temperatur der Sonne zu sprechen, d. h. von derjenigen Temperatur, welche die Sonne haben müßte, um der Erde die tatsächlich zu beobachtende Wärmestrahlung zuzusenden, wenn sie wie ein schwarzer Körper strahlen würde. Die scheinbare Temperatur der Sonne ist nun offenbar nichts anderes als die wirkliche Temperatur der Sonnenstrahlen[1], sie hängt lediglich ab von der Beschaffenheit der Strahlen, ist also eine Eigenschaft der Strahlen und nicht eine Eigenschaft der Sonne. Daher wäre es wohl nicht nur bequemer, sondern auch exakter, diese Bezeichnung auch direkt anzuwenden, statt von einer doch nur fingierten und nur durch Einführung einer in Wirklichkeit unzutreffenden Voraussetzung verständlichen Temperatur der Sonne zu reden.

[1] im Durchschnitt genommen, da die Sonnenstrahlen verschiedener Farbe nicht genau die nämliche Temperatur besitzen.

In neuerer Zeit haben Helligkeitsmessungen an monochromatischem Licht L. Holborn und F. Kurlbaum[1] zu der Einführung des Begriffs der „schwarzen" Temperatur einer strahlenden Oberfläche geführt. Die schwarze Temperatur einer strahlenden Oberfläche wird gemessen durch die Helligkeit der Strahlen, welche sie emittiert, sie ist im allgemeinen für jeden einzelnen Strahl von bestimmter Farbe, Richtung und Polarisation, den die Oberfläche emittiert, eine besondere, und stellt eben einfach die Temperatur dieses Strahles dar. Statt der unendlich vielen „schwarzen" Temperaturen der emittierenden Oberfläche haben wir hier also eine ganz bestimmte wirkliche Temperatur eines jeden emittierten Strahles, welche durch seine Helligkeit (spezifische Intensität) $\mathfrak{K}$ und durch seine Schwingungszahl ν nach Gleichung (136) gegeben ist, ohne jede Rücksicht auf seine Abstammung und auf seine Vorgeschichte. Die numerisch bestimmte Form dieser Gleichung wird unten im § 162 angegeben werden. Da ein schwarzer Körper das maximale Emissionsvermögen besitzt, so kann die Temperatur eines emittierten Strahles niemals höher sein als die des emittierenden Körpers.

§ 102. Machen wir noch eine einfache Anwendung der zuletzt gewonnenen Sätze auf den speziellen Fall der schwarzen Strahlung. Für diese ist nach (81) die gesamte räumliche Entropiedichte:

$$s = \frac{4}{3} a T^3. \tag{138}$$

Also nach (132) die spezifische Intensität der gesamten Entropiestrahlung nach irgend einer Richtung:

$$L = \frac{c}{8\pi} a T^3 \tag{139}$$

und die gesamte Entropiestrahlung durch ein Flächenelement $d\sigma$ nach einer Seite, gemäß (128);

$$\frac{c}{3} a T^3 \, d\sigma \, dt. \tag{140}$$

Wir wollen jetzt als spezielles Beispiel die beiden Hauptsätze der Thermodynamik anwenden auf den Fall, daß die Oberfläche eines schwarzen Körpers von der Temperatur T allseitig getroffen wird von schwarzer Strahlung der Temperatur T'. Dann emittiert

[1] L. Holborn und F. Kurlbaum, Drudes Ann. 10, p. 229, 1903.

der schwarze Körper pro Flächeneinheit und Zeiteinheit nach (7) und (76) die Energie:

$$\pi K = \frac{a c}{4} T^4$$

und nach (140) die Entropie:

$$\frac{a c}{3} T^3 .$$

Dagegen absorbiert er die Energie: $\frac{a c}{4} T'^4$ und die Entropie:

$$\frac{a c}{3} T'^3 .$$

Nach dem ersten Hauptsatz ist also die dem Körper im ganzen zugeführte Wärme, positiv oder negativ, je nachdem T' größer oder kleiner als T ist:

$$Q = \frac{a c}{4} T'^4 - \frac{a c}{4} T^4 = \frac{a c}{4} (T'^4 - T^4),$$

und nach dem zweiten Hauptsatz ist die Änderung der Gesamtentropie positiv oder Null. Nun ändert sich die Entropie des Körpers um $\frac{Q}{T}$, die Entropie der Strahlung im Vakuum dagegen um:

$$\frac{a c}{3} (T^3 - T'^3).$$

Folglich ist die Änderung der Gesamtentropie des betrachteten Systems pro Zeiteinheit und Flächeneinheit:

$$\frac{a c}{4} \cdot \frac{T'^4 - T^4}{T} + \frac{a c}{3} (T^3 - T'^3) \geqq 0 .$$

Diese Beziehung ist in der Tat für alle Werte von T und T' erfüllt. Denn der Minimalwert des Ausdrucks auf der linken Seite ist Null; derselbe wird erreicht für $T = T'$. Dann ist der Vorgang reversibel. Sobald aber T von T' verschieden ist, haben wir merkliche Entropievermehrung, der Prozeß ist also irreversibel. Im besonderen ergibt sich für $T = 0$ die Entropievermehrung gleich ∞, d. h. die Absorption von Wärmestrahlung durch einen schwarzen Körper von der absoluten Temperatur Null ist mit unendlich großer Entropievermehrung verknüpft, kann also durch keine endliche Kompensation rückgängig gemacht werden. Dagegen ist für $T' = 0$ die Entropievermehrung nur gleich $\frac{a c}{12} T^3$, d. h. die Emission eines schwarzen Körpers von der Temperatur T, ohne gleichzeitige Absorption von Wärmestrahlung ist

irreversibel, läßt sich aber durch eine Kompensation von mindestens dem angegebenen endlichen Betrage rückgängig machen. In der Tat: Läßt man die vom Körper emittierten Strahlen wieder auf ihn zurückfallen, etwa durch geeignete Spiegelung, so wird der Körper diese Strahlen zwar wieder absorbieren, aber notwendigerweise gleichzeitig neue Strahlen emittieren, und hierin liegt die vom zweiten Hauptsatz geforderte Kompensation.

Allgemein kann man sagen: Emission ohne gleichzeitige Absorption ist irreversibel, während dagegen der umgekehrte Vorgang: Absorption ohne gleichzeitige Emission, in der Natur unmöglich ist.

§ 103. Ein weiteres Beispiel der Anwendung der beiden Hauptsätze der Thermodynamik liefert die oben im § 70 betrachtete irreversible Ausdehnung einer ursprünglich schwarzen Strahlung von dem Volumen V und der Temperatur T auf das größere Volumen V', aber diesmal bei Abwesenheit jeglicher absorbierenden und emittierenden Substanz. Dann bleibt nicht nur die Gesamtenergie, sondern auch die Energie jeder einzelnen Schwingungszahl ν erhalten, also, wenn infolge diffuser Reflexion an den Wänden die Strahlung wieder nach allen Richtungen gleichförmig geworden ist: $u_\nu V = u_\nu' V'$, und hierdurch ist nach (118) auch T_ν', die Temperatur der monochromatischen Strahlung von der Schwingungszahl ν, im Endzustand bestimmt. Die Ausführung der Berechnung kann allerdings erst mit Hilfe der späteren Gleichung (233) erfolgen. Die Gesamtentropie der Strahlung, d. h. die Summe der Entropien der Strahlungen aller Schwingungszahlen:

$$V' \cdot \int_0^\infty \mathfrak{s}_\nu' \, d\nu$$

muß nach dem zweiten Hauptsatz im Endzustand größer sein als im Anfangszustand. Da T_ν' für die verschiedenen Schwingungszahlen ν verschiedene Werte besitzt, so ist die Endstrahlung nicht mehr schwarz. Daher erhält man durch nachträgliche Einbringung eines Kohlestäubchens in den Hohlraum eine endliche Änderung der Energieverteilung, und die Entropie steigt dabei weiter bis auf den in (82) berechneten Wert S.

Dritter Abschnitt.

Emission und Absorption elektromagnetischer Wellen durch einen linearen Oszillator.

Erstes Kapitel.
Einleitung. Schwingungsgleichung eines linearen Oszillators.

§ 104. Das Hauptproblem der Theorie der Wärmestrahlung, dessen Lösung in diesem Abschnitt vorbereitet werden soll, ist die Bestimmung der Energieverteilung in dem von der schwarzen Strahlung gelieferten Normalspektrum, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Auffindung der im allgemeinen Ausdruck des Wienschen Verschiebungsgesetzes (119) noch unbestimmt gelassenen Funktion F. Zur Behandlung dieser Aufgabe wird es nötig sein, näher als bisher auf diejenigen Vorgänge einzugehen, welche die Entstehung und die Vernichtung der Wärmestrahlen bedingen, also auf den Akt der Emission und den der Absorption. Bei der Kompliziertheit dieser Vorgänge und der Schwierigkeit, darüber irgendwelche bestimmte Einzelheiten in Erfahrung zu bringen, wäre es freilich gänzlich aussichtslos, auf diesem Wege irgendwelche sichere Resultate zu gewinnen, wenn nicht als zuverlässiger Führer in diesem dunkeln Gebiete der im § 51 abgeleitete Kirchhoffsche Satz benutzt werden könnte, welcher besagt, daß ein rings durch spiegelnde Wände abgeschlossenes Vakuum, in welchem beliebige emittierende und absorbierende Körper in beliebiger Anordnung verstreut sind, im Laufe der Zeit den stationären Zustand der schwarzen Strahlung annimmt, der vollständig bestimmt ist durch einen einzigen Parameter:

die Temperatur, und insbesondere nicht abhängt von der Anzahl, der Beschaffenheit und der Anordnung der ponderablen Körper. Es ist also zur Untersuchung der Eigenschaften des Zustandes der schwarzen Strahlung ganz gleichgültig, welcher Art die Körper sind, welche man im Vakuum befindlich voraussetzt, ja es kommt nicht einmal darauf an, ob solche Körper in der Natur wirklich irgendwo vorkommen, sondern nur darauf, ob ihre Existenz und ihre Eigenschaften mit den Gesetzen der Elektrodynamik und der Thermodynamik überhaupt verträglich sind. Sobald es nur gelingt, für irgend eine beliebig herausgegriffene spezielle Art und Anordnung emittierender und absorbierender Systeme einen Strahlungszustand im umgebenden Vakuum nachzuweisen, der sich durch absolute Stabilität auszeichnet, so kann dieser Zustand kein anderer sein als der der schwarzen Strahlung.

Von der durch diesen Satz gewährleisteten Freiheit Gebrauch machend, wählen wir uns nun unter allen emittierenden und absorbierenden Systemen das denkbar einfachste aus, nämlich einen einzigen ruhenden Oszillator, bestehend aus zwei mit gleichen Elektrizitätsmengen von entgegengesetztem Vorzeichen geladenen Polen, welche auf einer festen gerade gerichteten Linie, der Achse des Oszillators, gegeneinander beweglich sind.

Allgemeiner und den natürlichen Verhältnissen näher angepaßt wäre es freilich, die Schwingungen des Oszillators, wie sie durch die Bewegungen der beiden Pole bedingt werden, statt mit einem einzigen, mit drei Graden von Bewegungsfreiheit auszustatten, d. h. dieselben nicht geradlinig, sondern räumlich vorauszusetzen. Diese Annahme läßt sich vollkommen analog der hier gemachten einfacheren durchführen, entsprechend der Zerlegung einer räumlichen Bewegung in ihre drei geradlinigen aufeinander senkrechten Komponenten. Indessen können wir uns nach der oben dargelegten prinzipiellen Überlegung, ohne eine wesentliche Einbuße in der Allgemeinheit unserer Betrachtungen befürchten zu müssen, von vornherein auf die Behandlung einer einzigen Komponente beschränken.

Dagegen könnte es prinzipielle Bedenken erregen, daß wir uns den ganzen Oszillator als ruhend vorstellen, da doch nach der kinetischen Gastheorie in Substanzen von endlicher Temperatur alle darin enthaltenen frei beweglichen materiellen Partikel

im Mittel eine bestimmte endliche kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung besitzen. Indessen läßt sich auch dies Bedenken heben durch die Erwägung, daß mit der kinetischen Energie noch nicht die Geschwindigkeit festgelegt ist. Man braucht nur den Oszillator, etwa in seinem positiven Pole, mit einer verhältnismäßig bedeutenden, elektrodynamisch vollkommen unwirksamen trägen Masse belastet zu denken, um seine Geschwindigkeit, bei bestimmter kinetischer Energie, unter jeden beliebigen Betrag herabzudrücken. Diese Überlegung hält natürlich auch dann noch Stand, wenn man, wie es jetzt mehrfach geschieht, alle Trägheit auf elektrodynamische Wirkungen zurückführt. Denn diese Wirkungen sind jedenfalls von ganz anderer Art als die im folgenden zu betrachtenden, und können sie daher nicht beeinflussen.

Der Zustand des angenommenen Oszillators sei vollständig bestimmt durch sein „Moment" $f(t)$, d. h. durch das Produkt aus der elektrischen Ladung des auf der positiven Seite der Achse gelegenen Poles in den Polabstand, und durch dessen Differentialquotienten nach der Zeit:

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t). \tag{141}$$

Die Energie des Oszillators sei von der folgenden einfachen Form:

$$U = \tfrac{1}{2} K f^2 + \tfrac{1}{2} L f'^2, \tag{142}$$

wobei K und L positive Konstante bezeichnen, die von der Natur des Oszillators in irgend einer, hier nicht näher zu erörternden Weise abhängen.

§ 105. Würde bei den Schwingungen des Oszillators die Energie U genau konstant bleiben, so hätte man:

$$dU = K f\, df + L f'\, df' = 0$$

oder mit Rücksicht auf (141):

$$K f(t) + L f''(t) = 0 \tag{143}$$

und daraus ergäbe sich als allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung eine rein periodische Schwingung:

$$f = C \cos(2\pi \nu_0 t - \vartheta),$$

wobei C und ϑ die Integrationskonstanten, und ν_0 die Schwingungszahl pro Zeiteinheit bedeutet:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{L}}. \tag{144}$$

Ein solcher mit konstanter Energie periodisch schwingender Oszillator würde weder von dem umgebenden elektromagnetischen Felde beeinflußt werden, noch würde er irgendwelche Strahlungswirkungen nach außen hin ausüben, er könnte also für die Wärmestrahlung im umgebenden Vakuum von keinerlei Bedeutung sein.

Nach der MAXWELLschen Theorie bleibt nun aber die Schwingungsenergie U des Oszillators im allgemeinen keineswegs konstant, sondern der Oszillator entsendet vermöge seiner Schwingungen nach allen Richtungen Kugelwellen in das umgebende Feld hinaus, und hiermit muß nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie, wenn nicht andererseits von außen her Wirkungen auf den Oszillator ausgeübt werden, notwendig ein Verlust von Schwingungsenergie, also eine Dämpfung der Schwingungsamplitude verbunden sein. Wir wollen zunächst den Betrag dieser Dämpfung berechnen.

§ 106. Zu diesem Zweck gehen wir zunächst von folgender partikulären Lösung der MAXWELLschen Feldgleichungen (52) aus:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} & \mathfrak{H}_x &= \frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial t} \\ \mathfrak{E}_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} & \mathfrak{H}_y &= -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial t} \\ \mathfrak{E}_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} & \mathfrak{H}_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

wobei die Funktion F von x, y, z, t der Bedingung genügt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \cdot \triangle F. \tag{146}$$

Daß diese Größen wirklich allen Bedingungsgleichungen des Feldes genügen, erkennt man direkt durch Substitution in (52).

Nehmen wir spezieller an, daß die Funktion F außer von der Zeit t nur von der Entfernung r des Feldpunktes x, y, z vom Anfangspunkt der Koordinaten abhängt, so verwandelt sich die Gleichung (146) in:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right)$$

und die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$F = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right), \tag{147}$$

wobei f und g zwei ganz beliebige Funktionen eines einzigen Arguments bedeuten. Die Funktion f entspricht einer Kugelwelle, die vom Anfangspunkt der Koordinaten nach außen, die Funktion g einer Kugelwelle, die von außen nach dem Anfangspunkt der Koordinaten fortschreitet. Die Welle g kommt in der Natur nur unter ganz besonderen Umständen zu stande (vgl. unten § 169); wir lassen sie hier fort, da wir jetzt ohnehin keinerlei von außen auf den Oszillator fallende Wellen als vorhanden annehmen wollen, und erhalten daher:

$$F = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{148}$$

§ 107. Um nun die physikalische Bedeutung der vorliegenden partikulären Lösung der MAXWELLschen Feldgleichungen kennen zu lernen, betrachten wir solche Punkte (x, y, z) des Feldes, welche dem Anfangspunkte der Koordinaten so nahe liegen, daß für alle Zeiten $\frac{r}{c} f'$ klein ist gegen f. (Wenn f periodisch oder nahezu periodisch ist, so bedeutet dies, daß die Entfernung r vom Anfangspunkt klein ist gegen die Wellenlänge im Vakuum.) Dann ist auch $\frac{r}{c} f''$ klein gegen f', und a fortiori $\frac{r^2}{c^2} f''$ klein gegen f, und hierdurch vereinfachen sich, wie man leicht aus dem Ausdruck (148) von F erkennt, die Gleichungen (145) folgendermaßen:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{E}_x = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial z} & \mathfrak{H}_x = \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial t} \\ \mathfrak{E}_y = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z} & \mathfrak{H}_y = -\dfrac{1}{c} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial t} \\ \mathfrak{E}_z = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} & \mathfrak{H}_z = 0. \end{array}\right. \tag{149}$$

Die elektrischen Gleichungen besagen, daß in der Nähe des Anfangspunktes der Koordinaten das elektrische Feld den Charakter eines elektrostatischen hat:

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad} \frac{\partial F}{\partial z} = -\operatorname{grad} \varphi$$

mit der Potentialfunktion:

$$\varphi = -\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{r^3} \cdot f(t),$$

also entsprechend einem nach der positiven z-Achse gerichteten elektrischen Dipol vom Moment $f(t)$. Die magnetischen Gleichungen besagen, daß das magnetische Feld in der Nähe des Anfangspunktes der Koordinaten herrührt von einem in der Richtung der z-Achse fließenden Stromelement, dessen Intensität multipliziert mit der Länge den Wert $f'(t)$ besitzt. Dies ist genau dasjenige Stromelement, welches durch die Momentänderung des obigen Dipols bedingt ist.

Hierdurch ist gezeigt, daß durch die Gleichungen (145) und (148), welche im ganzen unendlichen Raume mit Ausschluß des Punktes $r = 0$ und seiner nächsten Umgebung Gültigkeit besitzen, dasjenige elektromagnetische Feld dargestellt wird, welches von einem im Koordinatenanfangspunkt befindlichen nach der z-Achse gerichteten elektrischen Dipol vom Moment $f(t)$ hervorgerufen wird. Um diesen Dipol mit dem anfangs betrachteten Oszillator identifizieren zu können, ist nur noch die Einführung der Voraussetzung nötig, daß für alle Zeiten die Lineardimensionen des Oszillators klein sind gegen die Größe $\frac{ef}{f'}$, also auch, falls der Oszillator periodisch schwingt, klein gegen die Wellenlänge dieser Schwingung im Vakuum. Denn sonst würde das elektromagnetische Feld in der Nähe des Oszillators nicht mehr durch $f(t)$ und $f'(t)$ allein bestimmt sein, vielmehr würde die Schwingung eine merkliche Zeit brauchen, um sich von einer Stelle des Oszillators zu einer anderen fortzupflanzen.

§ 108. Zur Bestimmung der vom Oszillator ausgestrahlten Energie berechnen wir die Energiemenge, welche durch eine um den Oszillator als Mittelpunkt beschriebene Kugelfläche gemäß dem Poyntingschen Satze nach außen strömt. Doch darf man nicht etwa die nach dem genannten Satze in einem unendlich kleinen Zeitintervall dt durch die Kugelfläche nach außen strömende Energie gleich der während desselben Zeitintervalls vom Oszillator ausgestrahlten Energie setzen. Denn im allgemeinen strömt die elektromagnetische Energie nicht immer in der Richtung nach außen, sondern sie strömt abwechselnd hin und her, und man würde auf diese Weise für

die Größe der Ausstrahlung zu Werten gelangen, welche bald positiv, bald negativ sind und überdies noch wesentlich vom Radius der zugrunde gelegten Kugel abhängen, und zwar in der Weise, daß sie mit abnehmendem Radius ins Unbegrenzte wachsen, — was dem Begriff der ausgestrahlten Energie widerspricht. Diese wird vielmehr nur dann unabhängig von dem Kugelradius r gefunden, wenn man nicht für ein Zeitelement dt, sondern für eine endliche, hinreichend groß gewählte Zeit den Betrag der im ganzen durch die Kugelfläche nach außen strömenden Energie berechnet. Sind die Schwingungen rein periodisch, so kann man dafür die Zeit einer Periode wählen; sind sie es nicht, was wir hier der Allgemeinheit wegen annehmen müssen, so läßt sich für die mindestens notwendige Größe der Zeit von vornherein kein anderes allgemeines Kriterium angeben, als dasjenige, daß die ausgestrahlte Energie sich als unabhängig ergibt von dem Radius der zugrunde gelegten Kugel. In der Theorie der Wärmestrahlung handelt es sich immer um so schnelle Schwingungen, daß man hier praktisch stets mit einer gegen eine Sekunde sehr kleinen Zeit auskommt.

Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung der durch die Kugelfläche strömenden Energie, wenn wir den Radius r der Kugel so groß wählen, daß für alle Zeiten $\frac{r}{c} f'$ groß gegen f. Dann ist auch $\frac{r}{c} f'$ groß gegen f, und a fortiori $\frac{r^2}{c^2} f''$ groß gegen f. Hierdurch gehen die Feldgleichungen (145) mit Berücksichtigung von (146) und (148) über in:

$$\mathfrak{E}_x = \frac{x z}{c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad \mathfrak{H}_x = -\frac{y}{c^2 r^2} f''\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{y z}{c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad \mathfrak{H}_y = \frac{x}{c^2 r^2} f''\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\mathfrak{E}_z = -\frac{x^2 + y^2}{c^2 r^3} f''\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad \mathfrak{H}_z = 0.$$

Hier sind die Verhältnisse aller Komponenten unabhängig von der Zeit, also auch ihre Richtungen konstant, und die Gleichungen:

$$x\,\mathfrak{E}_x + y\,\mathfrak{E}_y + z\,\mathfrak{E}_z = 0,$$
$$x\,\mathfrak{H}_x + y\,\mathfrak{H}_y + z\,\mathfrak{H}_z = 0,$$
$$\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_y\,\mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_z\,\mathfrak{H}_z = 0$$

zeigen, daß die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$, die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ und der Radiusvektor r gegenseitig senkrecht stehen. Die magnetische Feldstärke steht außerdem senkrecht auf der durch die x-Achse und r bestimmten Meridianebene, die elektrische Feldstärke liegt also in der Meridianebene. Es sind mithin reine Transversalwellen, senkrecht der Meridianebene polarisiert, die sich nach außen fortpflanzen, mit der Feldstärke:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c^2 r^2} \ddot{f}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\sin\vartheta}{c^2 r} \ddot{f}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

wenn ϑ den Winkel des Radiusvektor r mit der x-Achse, der Achse des Oszillators, bezeichnet.

Nun ist nach dem POYNTINGschen Satz die in der Zeit dt durch das Kugelflächenelement $d\sigma = r^2 d\Omega$ nach außen strömende Energie:

$$\frac{c}{4\pi} dt\, d\sigma\, \mathfrak{E}\mathfrak{H} = \frac{\sin^2\vartheta}{4\pi c^3} \ddot{f}^2\left(t - \frac{r}{c}\right) d\Omega\, dt \qquad (150)$$

$$= \frac{1}{4\pi c^3} \sin^3\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, \ddot{f}^2\left(t - \frac{r}{c}\right) dt,$$

also für die ganze Kugelfläche (φ von 0 bis 2π, ϑ von 0 bis π) und für das Zeitintervall von t bis $t + T$:

$$\frac{2}{3c^3} \int_t^{t+T} \ddot{f}^2\left(t - \frac{r}{c}\right) dt.$$

In diesem Ausdruck kommt der Kugelradius r nur noch in dem Argument von $\ddot{f}$ vor, und in der Tat ist die hier berechnete durch die Kugelfläche vom Radius r in der Zeit von t bis $t + T$ nach außen strömende Energie offenbar gleich der in dem gleichlangen, aber um $\frac{r}{c}$ zurückliegenden Zeitintervall, von $t - \frac{r}{c}$ bis $t - \frac{r}{c} + T$, von dem im Mittelpunkt der Kugel befindlichen Oszillator ausgestrahlten Energie.

Daher erhalten wir für die vom Oszillator in der Zeit von t bis $t + T$ ausgestrahlte oder emittierte Energie den Ausdruck:

$$\frac{2}{3c^3} \int_t^{t+T} \ddot{f}^2(t)\, dt. \qquad (151)$$

Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie ist die in der Zeit T ausgestrahlte Energie gleich der in der nämlichen Zeit erfolgten Abnahme der Schwingungsenergie des Oszillators U, also:

$$\frac{2}{3c^3}\int_t^{t+T} \ddot{f}^2(t)\,dt = -\int_t^{t+T} dU$$

oder:

$$\int_t^{t+T}\left(\frac{dU}{dt} + \frac{2}{3c^3}\ddot{f}^2(t)\right)dt = 0. \tag{152}$$

§ 109. Aus dieser für ein relativ großes Zeitintervall T gültigen Beziehung läßt sich naturgemäß kein eindeutiger Schluß ziehen auf das für jeden einzelnen Zeitpunkt t gültige Schwingungsgesetz des Oszillators, und in der Tat genügen auch die hier gegebenen Daten noch durchaus nicht, um den Verlauf der Schwingungen, bei gegebenem Anfangszustand, bis ins einzelne eindeutig zu bestimmen. Damit eine exakte Lösung des Schwingungsproblems überhaupt vorhanden ist, müßte die Natur des Oszillators in allen ihren Einzelheiten, an der Oberfläche und im Innern, genau bekannt sein. Dann würde aber die Behandlung der Aufgabe mit solchen mathematischen Schwierigkeiten verknüpft sein, daß die allgemeine Durchführung der Theorie nicht wohl möglich wäre.

Nun ist zu bedenken, daß es in der ganzen Theorie der Licht- und Wärmestrahlung gar nicht auf die exakte Lösung des Schwingungsproblems, d. h. auf die absolut genaue Berechnung der Schwingungsfunktion $f(t)$ ankommt, sondern nur auf eine angenäherte Lösung von demselben Grade der Genauigkeit, wie ihn die feinsten physikalischen Messungen liefern können. Diese beziehen sich aber, wie schon in § 3 betont wurde, immer nur auf solche Zeitintervalle, welche gegen die Dauer einer einzigen Schwingungsperiode außerordentlich groß sind. Daher können die Ergebnisse auch der feinsten Strahlungsmessungen niemals über den Inhalt der Energiegleichung (152) hinausgehen, und jede Differentialgleichung für $f(t)$, welche mit dieser Gleichung verträglich ist, liefert für den Oszillator ein zulässiges Schwingungsgesetz.[1] Von dieser Überlegung Gebrauch machend wollen wir

[1] Dies gilt immer, wenn nur hinreichend große Werte von T in Betracht kommen. Für kleinere Werte von T läßt sich möglicherweise

nun aus der Gleichung (152) das denkbar einfachste Schwingungsgesetz für den Oszillator ableiten.

Würde man den in (152) mit dt multiplizierten Ausdruck direkt gleich Null setzen, so erhielte man als Schwingungsgesetz eine nichtlineare Differentialgleichung. Daher formen wir das Integral noch um, indem wir schreiben:

$$\int_t^{t+T} \left(\frac{d}{dt} \left(U + \frac{2}{3c^3} \dot{f} \ddot{f} \right) - \frac{2}{3c^3} \dot{f} \ddot{f} \right) dt = 0. \tag{153}$$

Um diese mit (152) ganz identische Gleichung noch weiter zu vereinfachen, führen wir eine neue naheliegende Voraussetzung ein, die wir fortan stets festhalten wollen, und deren physikalische Bedeutung im nächsten Paragraph erhellen wird. Wir setzen nämlich fest, daß für alle Zeiten:

$$\frac{1}{c^3} \dot{f} \ddot{f} \text{ klein gegen } U. \tag{154}$$

Diese Bedingung läßt sich durch geeignete Wahl der Konstanten K und L allgemein erfüllen. Denn nach (142) ist im allgemeinen:

$$\sqrt{L} \dot{f} \text{ von der Größenordnung } \sqrt{K} \cdot f,$$

also auch $\sqrt{L} \ddot{f}$ von der Größenordnung $\sqrt{K} \dot{f}$ oder $\frac{K}{\sqrt{L}} f$;

folglich, durch Substitution in (154):

$$\frac{1}{c^3} \cdot \sqrt{\frac{K}{L}} f \cdot \frac{K}{L} f \text{ klein gegen } K f^2$$

oder

$$\frac{1}{c^3} \sqrt{\frac{K}{L^3}} \text{ klein gegen } 1. \tag{155}$$

Wir wollen zur Abkürzung schreiben:

$$\frac{2\pi}{3c^3} \sqrt{\frac{K}{L^3}} = \sigma. \tag{156}$$

Nach dieser ein für allemal gemachten Festsetzung, daß σ eine kleine Zahl ist, erhalten wir aus (153) in merklicher Annäherung:

---

an Stelle der einfachen linearen Differentialgleichung (158) ein anderes Schwingungsgesetz aufstellen, das den Vorgängen in der Natur noch besser angepaßt ist.

$$\int_{t}^{t+T} \left(\frac{dU}{dt} - \frac{2}{3c^3} f\ddot{f} \right) dt = 0 \tag{157}$$

und daraus, indem wir den mit dt multiplizierten Ausdruck gleich Null setzen und den Wert dU aus (142) substituieren, die lineare homogene Differentialgleichung:

$$Kf + L\dot{f} - \frac{2}{3c^3}\ddot{f} = 0 \tag{158}$$

als Schwingungsgleichung des Oszillators. Dieselbe unterscheidet sich von der Gleichung (143) für ungedämpfte Schwingungen durch das Dämpfungsglied mit $\ddot{f}$.[1]

§ 110. Um die Differentialgleichung (158) zu integrieren, setzen wir:

$$f(t) = e^{\omega t + \omega'}. \tag{159}$$

Dann wird die Differentialgleichung befriedigt, wenn

$$K + L\omega^2 - \frac{2}{3c^3}\omega^3 = 0. \tag{160}$$

Diese in ω kubische Gleichung hat eine reelle positive Wurzel und zwei komplexe Wurzeln. Die erstere hat keine physikalische Bedeutung, weil hierfür die Funktion $f(t)$ mit wachsender Zeit ungeheuer große Werte annimmt. Daher berücksichtigen wir nur die komplexen Wurzeln, indem wir setzen:

$$\omega = \alpha \pm \beta i \quad (\beta > 0) \tag{161}$$

und nach Substitution in (160) das Reelle vom Imaginären trennen:

$$K + L(\alpha^2 - \beta^2) - \frac{2}{3c^3}(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) = 0$$

und:

$$2L\alpha\beta - \frac{2}{3c^3}(3\alpha^2\beta - \beta^3) = 0.$$

Die zweite Gleichung ergibt:

$$\beta^2 = -3c^3 L\alpha + 3\alpha^2 \tag{162}$$

und dies in die erste Gleichung substituiert:

$$K + 3c^3 L^2\alpha - 8L\alpha^2 + \frac{16\alpha^3}{3c^3} = 0.$$

[1] Eine direkte Ableitung dieser Gleichung aus der Elektronentheorie ist kürzlich entwickelt worden von M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung (Leipzig, B. G. Teubner), p. 72, 1905.

Diese Gleichung in α hat nur eine einzige reelle Wurzel. Schreibt man sie mit Benutzung von (156) in der Form:

$$\frac{9\,\sigma^2 c^6 L^3}{4\,\pi^2} + 3\,c^3 L^2 \alpha - 8\,L\,\alpha^2 + \frac{16\,\alpha^3}{3\,c^3} = 0$$

und bedenkt, daß σ eine kleine Zahl ist, so erhellt, daß die reelle Wurzel α nahe gleich Null ist, und es ergibt sich mit Weglassung der Glieder mit höheren Potenzen von α als erste Annäherung:

$$\frac{9\,\sigma^2 c^6 L^3}{4\,\pi^2} + 3\,c^3 L^2 \alpha = 0\,,$$

$$\alpha = -\frac{3\,c^3 \sigma^2 L}{4\,\pi^2} = -\frac{K}{3\,c^3 L^2} \tag{163}$$

und dementsprechend nach (162):

$$\beta = \sqrt{\frac{K}{L}}\,. \tag{164}$$

Die gefundenen Werte von α und β denken wir uns in (161) und in (159) substituiert, setzen dann für ω' eine beliebige komplexe Konstante, und erhalten hierauf durch Abspaltung des reellen Teiles der Funktion $f(t)$ vom imaginären die reelle Lösung der Schwingungsgleichung (158) in folgender Form:

$$f(t) = C \cdot e^{\alpha t} \cos(\beta t - \vartheta)\,. \tag{165}$$

Der Oszillator führt also schwach gedämpfte Schwingungen aus, deren Periode und Dämpfung durch die Werte von β und α bestimmt sind. Die Amplitude C und die Phasenkonstante ϑ hängen vom Anfangszustand ab.

Bezeichnen wir mit ν_0 die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit, so ist

$$\nu_0 = \frac{\beta}{2\,\pi} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{K}{L}}\,, \tag{166}$$

also, nach Gleichung (144), bis auf die begangene kleine Vernachlässigung ebensogroß wie im Falle der ungedämpften Schwingungen.

Für das logarithmische Dämpfungsdekrement der Schwingungen, d. h. für den natürlichen Logarithmus des Quotienten zweier um die Zeit $\frac{1}{\nu_0}$ einer Schwingung auseinanderliegenden Werte von $f(t)$ ergibt sich:

$$\log e^{-\frac{\alpha}{\nu_0}} = -\frac{\alpha}{\nu_0} = \frac{K}{3c^3L^2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{L}{K}} = \sigma, \tag{167}$$

wodurch die oben in (156) zur Abkürzung eingeführte Konstante σ eine einfache physikalische Bedeutung erhält.

Statt durch die Energiekonstanten K und L kann man die Natur des Oszillators auch durch die Schwingungskonstanten ν_0 und σ charakterisieren, und erhält dann aus (166) und (167):

$$K = \frac{16\pi^4\nu_0^3}{3\sigma c^3}, \qquad L = \frac{4\pi^2\nu_0}{3\sigma c^3}. \tag{168}$$

Mit den neuen Konstanten lautet die Schwingungsgleichung (165):

$$f(t) = Ce^{-\sigma\nu_0 t}\cos(2\pi\nu_0 t - \vartheta). \tag{169}$$

§ 111. Nachdem wir bisher nur solche Schwingungen des Oszillators betrachtet hatten, die ohne jede Einwirkung von außen erfolgen und daher lediglich in dem Abklingen einer durch einen beliebig gegebenen Anfangszustand bedingten Erregung bestehen, wollen wir nun auch noch den allgemeineren Fall untersuchen, daß gleichzeitig von außen her auf den Oszillator gewisse Wirkungen ausgeübt werden, oder mit anderen Worten, daß der Oszillator sich in einem von vornherein gegebenen elektromagnetischen Felde befindet. Die elektrische und die magnetische Feldstärke dieses äußeren Feldes bezeichnen wir von jetzt an mit $\mathfrak{E}$ und mit $\mathfrak{H}$. Dann erweitert sich die Energiegleichung (157) dadurch, daß die Energie U des Oszillators jetzt außer durch die Ausstrahlung von Energie auch noch durch die Arbeit geändert wird, welche das äußere elektromagnetische Feld an dem Oszillator leistet, und diese Arbeit wird, da die Achse des elektrischen Dipols mit der x-Achse zusammenfällt, für ein Zeitelement dt ausgedrückt durch die Größe $\mathfrak{E}_x \cdot df = \mathfrak{E}_x \cdot \dot{f} \cdot dt$, wobei $\mathfrak{E}_x$ die x-Komponente der äußeren elektrischen Feldstärke am Orte des Oszillators bezeichnet, d. h. derjenigen elektrischen Feldstärke, welche am Orte des Oszillators bestehen würde, wenn derselbe gar nicht vorhanden wäre. Die übrigen Komponenten des äußeren Feldes haben keinen Einfluß auf die Schwingungen des Oszillators.

Da nun die Energie U des Oszillators im Zeitelement dt um den Betrag der angegebenen äußeren Arbeit vergrößert

wird, so ist die während der hinlänglich großen Zeit T vom Oszillator absorbierte Energie:[1]

$$\int_{t}^{t+T} \mathfrak{E}_z \dot{f}\, dt \tag{170}$$

und die vervollständigte Energiegleichung (157) lautet:

$$\int_{t}^{t+T} \left(\frac{dU}{dt} - \frac{2}{3c^3} \dot{f}\ddot{f} - \mathfrak{E}_z \dot{f} \right) dt = 0 .$$

Daraus folgt, wenn man wieder den mit dt multiplizierten Ausdruck $= 0$ setzt und den Wert von U aus (142) substituiert, als Schwingungsgleichung des Oszillators:

$$Kf + L\ddot{f} - \frac{2}{3c^3}\dddot{f} = \mathfrak{E}_z \tag{171}$$

oder, wenn man nach (168) für die Konstanten K und L die Konstanten ν_0 und σ einführt:

$$16\pi^4 \nu_0^3 f + 4\pi^2 \nu_0 \ddot{f} - 2\sigma \dddot{f} = 3\sigma c^3 \mathfrak{E}_z . \tag{172}$$

Sobald man aus dieser Gleichung mittels des gegebenen Anfangszustandes und der gegebenen äußeren Feldstärke $\mathfrak{E}_z$ die Schwingungsfunktion $f(t)$ des Oszillators berechnet hat, ist auch die Aufgabe gelöst, die Rückwirkung des Oszillators auf das äußere elektromagnetische Feld zu bestimmen. Denn außerhalb des Oszillators superponieren sich die Komponenten des ursprünglich gegebenen Feldes: die „primäre" Welle und die Komponenten der vom Oszillator emittierten Kugelwelle (145): die „sekundäre" Welle, wobei F durch (148) gegeben ist, überall einfach durch Addition, und damit ist der ganze Vorgang für alle Zeiten eindeutig bestimmt.

[1] Man sieht hieraus, daß die „absorbierte Energie" im allgemeinen auch negativ sein kann, d. h. daß unter Umständen durch die auffallende Strahlung dem Oszillator direkt Energie entzogen wird. Beispiele für diesen (in der Wärmestrahlung nicht realisierbaren) Fall werden wir im ersten Kapitel des fünften Abschnitts finden.

Zweites Kapitel. Ein Resonator unter der Einwirkung einer ebenen periodischen Welle.

§ 112. Als erste Anwendung der Schwingungsgleichung (172) betrachten wir den Fall, daß eine ebene einfach periodische Welle, die sich längs der x-Achse fortpflanzen möge und deren elektrische Feldstärke in die Richtung der z-Achse fällt, den im vorigen Kapitel betrachteten Oszillator trifft. Dann haben wir für die primäre, erregende Welle nach den allgemeinen MAXWELLschen Gleichungen (52):

$$\mathfrak{E}_x = 0 \qquad \mathfrak{H}_x = 0$$

$$\mathfrak{E}_y = 0 \qquad \mathfrak{H}_y = -C\cos\left[2\pi\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)-\vartheta\right]$$

$$\mathfrak{E}_z = C\cos\left[2\pi\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)-\vartheta\right] \qquad \mathfrak{H}_z = 0.$$

Hierbei ist ν die Schwingungszahl, C (positiv) die Amplitude und ϑ die Phasenkonstante der primären Welle.

Die Schwingungen des Oszillators werden im allgemeinen von seinem Anfangszustand abhängen. Wenn aber die Zeit t hinlänglich groß genommen wird, nämlich wenn $\sigma\nu_0 t$ eine große Zahl ist, so wird nach (169) der Anfangszustand für die Schwingungen des Oszillators gänzlich bedeutungslos werden, und dieselben sind dann durch die primäre Welle allein vollkommen bestimmt. In diesem Falle, den wir im folgenden ausschließlich betrachten werden, spielt der Oszillator die Rolle eines Resonators, seine Schwingungen erfolgen in derselben Periode wie die der ihn erregenden primären Welle. Setzt man in die Schwingungsgleichung (172) den Wert von $\mathfrak{E}_z$ für den Ort des Oszillators $x = 0$:

$$\mathfrak{E}_z = C\cos(2\pi\nu t - \vartheta), \tag{173}$$

so ergibt dieselbe integriert:

$$f(t) = \frac{3c^3 C\sin\gamma}{16\pi^3\nu^3}\cos(2\pi\nu t - \vartheta - \gamma), \tag{174}$$

wobei

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{\pi\nu_0(\nu_0^2-\nu^2)}{\sigma\nu^3}. \tag{175}$$

Um den Winkel γ eindeutig zu bestimmen, setzen wir noch fest, daß er zwischen 0 und π liegt. Dann ist $\sin\gamma$ ebenso wie C stets positiv.

§ 113. Wenn das Verhältnis der Schwingungszahl ν der primären Welle zu der Eigenschwingungszahl ν_0 des Resonators mittelgroß und von 1 merklich verschieden ist, so nimmt, da σ eine kleine Zahl ist, $\operatorname{ctg}\gamma$ große Werte an, positiv oder negativ, je nachdem ν kleiner oder größer als ν_0. Dadurch wird der Winkel γ nahezu 0 oder nahezu π, und die dem $\sin\gamma$ proportionale Schwingungsamplitude des Resonators wird klein. Auch für die Grenzfälle $\nu = 0$ und $\nu = \infty$ werden die Schwingungen des Resonators unmerklich, da in beiden Fällen der Quotient $\frac{\sin\gamma}{\nu^3}$ kleine Werte annimmt. Damit also ein merkliches Mitschwingen des Resonators stattfindet, müssen die Schwingungszahlen ν und ν_0 nahezu übereinstimmen. In diesem Falle weicht die Phase der Resonatorschwingung merklich ab von der der primären Welle, da der Phasenunterschied gerade γ beträgt. Für $\nu = \nu_0$ wird die Schwingungsamplitude des Resonators ein Maximum, und der Phasenunterschied γ wird gleich $\frac{\pi}{2}$. Dann geht in demselben Augenblick, wo die äußere Feldstärke $\mathfrak{E}_z$ ihren Maximalwert erreicht, $f(t)$ durch Null hindurch, d. h. der elektrische Dipol ist in diesem Augenblick ungeladen und daher der Ladungsstrom $f'(t)$ in ihm in der größten Entwickelung begriffen. Überhaupt ist dann $f'(t)$ einfach proportional $\mathfrak{E}_z$, und damit die vom Resonator absorbierte Energie (170) ein Maximum.

§ 114. Im allgemeinen Falle, bei beliebigem Verhältnis von ν zu ν_0, ist die vom Resonator absorbierte Energie nach (170) pro Zeiteinheit:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \mathfrak{E}_z f'\, dt = \overline{\mathfrak{E}_z f'},$$

wo der Wert von $\mathfrak{E}_z$ aus (173) zu entnehmen ist, während f' sich nach (174) ergibt zu:

$$f' = -\frac{3c^3 C \sin\gamma}{8\pi^3\nu^3}\sin(2\pi\nu t - \vartheta - \gamma) \qquad (176)$$

$$= -\frac{3c^3 C \sin\gamma}{8\pi^3\nu^3}[\sin(2\pi\nu t - \vartheta)\cos\gamma - \cos(2\pi\nu t - \vartheta)\sin\gamma].$$

Bedenkt man nun, daß der zeitliche Mittelwert von $\sin(2\pi\nu t - \vartheta)\cos(2\pi\nu t - \vartheta)$ gleich Null, und der von $\cos^2(2\pi\nu t - \vartheta)$ gleich $\frac{1}{2}$

ist, so folgt für die pro Zeiteinheit vom Resonator absorbierte Energie:

$$\overline{\mathfrak{E}_z \dot{f}} = \frac{3c^3 C^2 \sin^2\gamma}{16\pi^2\nu^2}, \tag{177}$$

also positiv. Da der ganze Vorgang periodisch ist, so muß diese Energie zugleich auch die emittierte Energie darstellen. In der Tat ergibt sich aus (176):

$$\dot{f} = -\frac{3c^3 C \sin\gamma}{4\pi\nu}\cos(2\pi\nu t - \vartheta - \gamma)$$

und für die vom Resonator pro Zeiteinheit emittierte Energie nach (151):

$$\frac{2}{3c^3}\overline{\dot{f}^2} = \frac{3c^3 C^2 \sin^2\gamma}{16\pi^2\nu^2}.$$

Für den zeitlichen Mittelwert der Energie des Resonators ergibt sich aus (142) und (168) auf ähnliche Weise:

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}K\overline{f^2} + \tfrac{1}{2}L\overline{\dot{f}^2} \\ &= \frac{3c^3\nu_0(\nu_0^2+\nu^2)}{64\pi^2\sigma\nu^6} C^2\sin^2\gamma. \end{aligned} \tag{178}$$

§ 115. Fassen wir nun die Rückwirkung der Resonatorschwingungen auf die primäre Welle kurz ins Auge. Während sich die Komponenten der Feldstärken der primären und der sekundären, vom Resonator emittierten Welle überall einfach durch Addition übereinanderlagern, ist das mit den Energiestrahlungen keineswegs der Fall. Denn schon aus dem Umstand, daß der Resonator vermöge seiner Schwingungen nach allen Richtungen des Raumes Energie durch Strahlung emittiert, folgt nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie, daß er durch seine Schwingungen gleichzeitig der primären Welle Energie entziehen muß. In der Tat ergibt sich bei näherer Betrachtung, daß die primäre und die sekundäre Welle da, wo sie sich gemeinsam fortpflanzen, nämlich in denjenigen vom Resonator ausgehenden Richtungen, die mit der positiven x-Achse kleine Winkel bilden, stets in der Weise interferieren, daß sie sich gegenseitig schwächen, und eine direkte Berechnung der Energieströmung nach dem POYNTINGschen Satz, auf die aber hier nicht näher eingegangen zu werden braucht, zeigt, daß die Schwächung der primären Welle im ganzen genommen gerade gleich ist der vom Resonator absorbierten Energie. Der Resonator

absorbiert also pro Zeiteinheit aus der primären Welle einen bestimmten, durch (177) ausgedrückten Energiebetrag und zerstreut ihn nach allen Richtungen.

Drittes Kapitel. Ein Resonator unter der Einwirkung stationärer Wärmestrahlung. Entropie und Temperatur des Resonators.

§ 116. Nachdem wir im vorigen Kapitel die Schwingungsgleichung (172) eines linearen Oszillators auf den speziellen Fall angewendet haben, daß eine ebene periodische Welle als Erreger dient, wollen wir uns jetzt den Oszillator einer stationären Wärmestrahlung ausgesetzt denken. Dieser Fall unterscheidet sich insofern wesentlich von dem vorigen, als eine ebene periodische Welle niemals, auch nicht bei entsprechend großer Schwingungszahl, als Wärmestrahlung gedeutet werden kann. Denn zu einer endlichen Wärmestrahlungsintensität gehört nach § 16 immer auch ein endlicher Öffnungswinkel der Strahlen, und nach § 18 immer ein Spektralbezirk von endlicher Breite. Eine absolut ebene und absolut periodische Welle besitzt aber den Öffnungswinkel Null und die Spektralbreite Null. Daher kann auch bei einer ebenen periodischen Welle weder von Entropie noch von Temperatur der Strahlung die Rede sein. Die nähere Erklärung dieses für die elektromagnetische Theorie der Wärmestrahlung prinzipiell wichtigen Umstandes werden wir im nächsten Abschnitt kennen lernen.

Wir stellen uns also nun den Oszillator in einem allseitig durch vollständig reflektierende Wände begrenzten, von beliebiger Wärmestrahlung erfüllten Vakuum befindlich vor. Dann wird sich im Verlauf der Zeit, wie in jedem nach außen abgeschlossenen, mit beliebiger emittierender und absorbierender Substanz besetzten Raum, ein stationärer Zustand herausbilden, in welchem das Vakuum von unpolarisierter, nach allen Richtungen gleichmäßiger Wärmestrahlung durchzogen wird. Von dieser Wärmestrahlung absorbiert und emittiert der Oszillator nur solche Strahlen, deren Schwingungszahl nahe gleich ν_0 ist; folglich übt er auf diese, und nur auf diese, einen Einfluß aus. Für alle übrigen Strahlenarten verhält er sich wie eine diathermane Substanz: sie streichen über ihn hinweg, ohne ihn zu alterieren oder von ihm alteriert zu werden.

§ 117. Wir fragen nun nach dem Zusammenhang, welcher nach Eintritt des stationären Zustandes zwischen den Resonatorschwingungen und der Wärmestrahlung im Vakuum besteht. Die Gleichung (172) verlangt nur die Berücksichtigung der Komponente $\mathfrak{E}_z$ der erregenden Welle am Orte des Oszillators als Funktion der Zeit. Diese Größe setzt sich aus allen den Oszillator treffenden Wärmestrahlen zusammen und läßt sich, wie kompliziert sie auch sein möge, für ein begrenztes Zeitintervall, etwa von $t = 0$ bis $t = \mathfrak{T}$, als FOURIERsche Reihe schreiben:

$$\mathfrak{E}_z = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{\mathfrak{T}} - \vartheta_n\right), \tag{179}$$

wobei die Summation über alle positiven ganzen Zahlen n zu erstrecken ist, während die Konstanten C_n (positiv) und ϑ_n von Glied zu Glied beliebig variieren können. Das Zeitintervall $\mathfrak{T}$, die Grundperiode der FOURIERschen Reihe, wollen wir so groß wählen, daß alle Zeiten t, die wir in der Folge betrachten, in dies Zeitintervall hineinfallen, also $0 < t < \mathfrak{T}$. Daher ist jedenfalls das Produkt $\nu_0 \mathfrak{T}$ eine ungeheuer große Zahl. Außerdem aber wollen wir immer t so groß nehmen, daß der Zustand des Oszillators zur Zeit $t = 0$ auf die Vorgänge zur Zeit t gar nicht mehr von Einfluß ist. Dies erfordert, nach (169), daß das Produkt $\sigma \nu_0 t$, und um so mehr

$$\sigma \nu_0 \mathfrak{T} \text{ eine große Zahl} \tag{180}$$

ist. Diese Bedingungen lassen sich ohne weiteres erfüllen, da ja die Größe von $\mathfrak{T}$ nach oben hin durch nichts begrenzt ist.

§ 118. Wenn wir auch über die Funktion $\mathfrak{E}_z$ im einzelnen nichts wissen, so steht sie doch in einem angebbaren Zusammenhang mit den Eigenschaften der Wärmestrahlung. Zunächst haben wir für die räumliche Strahlungsdichte im Vakuum nach der MAXWELLschen Theorie:

$$u = \frac{1}{8\pi} \cdot (\overline{\mathfrak{E}_x^2} + \overline{\mathfrak{E}_y^2} + \overline{\mathfrak{E}_z^2} + \overline{\mathfrak{H}_x^2} + \overline{\mathfrak{H}_y^2} + \overline{\mathfrak{H}_z^2}).$$

Da nun wegen des stationären, nach allen Richtungen gleichmäßigen Strahlungszustandes die genannten sechs Mittelwerte einander gleich sind, so folgt:

$$u = \frac{3}{4\pi} \overline{\mathfrak{E}_z^2}$$

und aus (179):

$$u = \frac{3}{8\pi} \sum C_n^2, \tag{181}$$

ferner für die spezifische Intensität der in irgendeiner Richtung fortschreitenden Strahlung nach (21):

$$K = \frac{c\,u}{4\pi} = \frac{3c}{32\pi^2} \sum C_n^2. \tag{182}$$

§ 119. Nehmen wir nun auch die spektrale Zerlegung der letzten beiden Gleichungen vor. Zunächst haben wir nach (22):

$$u = \int_0^\infty \mathfrak{u}_\nu \, d\nu = \frac{3}{8\pi} \sum_0^\infty C_n^2. \tag{183}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung zerfällt die Summe $\sum$ in die einzelnen den Ordnungszahlen n entsprechenden Glieder, von denen jedes einer einfach periodischen „Partialschwingung" mit der Schwingungszahl $\nu = \frac{n}{\mathfrak{T}}$ entspricht. Genau genommen stellt diese Beziehung keine stetige Aufeinanderfolge von Schwingungszahlen ν dar, da n eine ganze Zahl ist. Aber n ist für die hier in Betracht kommenden Schwingungszahlen so ungeheuer groß, daß die den fortlaufenden Werten von n entsprechenden Schwingungszahlen ν sehr dicht beieinander liegen. Daher umfaßt auch das Intervall $d\nu$, obwohl gegen ν unendlich klein, dennoch eine große Anzahl von Partialschwingungen, etwa n', wobei:

$$d\nu = \frac{n'}{\mathfrak{T}}. \tag{184}$$

Setzen wir nun in der Gleichung (183) die dem Intervall $d\nu$ entsprechenden Energiedichten, die ja von denen der übrigen Spektralbezirke unabhängig sind, auf beiden Seiten einander gleich, so ergibt sich:

$$\mathfrak{u}_\nu \, d\nu = \frac{3}{8\pi} \sum_n^{n+n'} C_n^2$$

oder nach (184):

$$\mathfrak{u}_\nu = \frac{3\mathfrak{T}}{8\pi} \cdot \frac{1}{n'} \sum_n^{n+n'} C_n^2 = \frac{3\mathfrak{T}}{8\pi} \cdot \overline{C_n^2}, \tag{185}$$

wobei wir mit $\overline{C_n^2}$ den Mittelwert von C_n^2 in dem Intervall von n bis $n + n'$ bezeichnen. Daß ein solcher Mittelwert, dessen Größe unabhängig ist von n', falls nur n' klein gegen n ge-

nommen wird, überhaupt existiert, ist natürlich nicht von vornherein selbstverständlich, sondern durch eine besondere, der stationären Wärmestrahlung eigentümliche Eigenschaft der Funktion $\mathfrak{E}_z$ bedingt. Dagegen läßt sich, da viele Glieder zu dem Mittelwert beitragen, über die Größe eines einzelnen Gliedes C_n^2 gar nichts aussagen, und ebensowenig etwas über den Zusammenhang zweier aufeinanderfolgender Glieder. Dieselben sind vielmehr als völlig unabhängig voneinander anzusehen.

In ganz ähnlicher Weise ergibt sich mit Benutzung von (24) für die spezifische Intensität eines monochromatischen geradlinig polarisierten, nach irgendeiner Richtung fortschreitenden Strahles:

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{3c\mathfrak{T}}{64\pi^2}\,\overline{C_n^2}. \tag{186}$$

Man ersieht hieraus u. a., daß nach der elektromagnetischen Strahlungstheorie ein monochromatischer Licht- oder Wärmestrahl keineswegs durch eine einzelne einfach periodische Welle dargestellt wird, sondern stets durch eine Übereinanderlagerung einer großen Anzahl von einfach periodischen Wellen, aus denen die Intensität des Strahles durch Bildung eines Mittelwertes sich zusammensetzt. Dem entspricht auch die aus der Optik bekannte Tatsache, daß zwei Strahlen von derselben Farbe, aber verschiedener Herkunft niemals miteinander interferieren, was notwendig der Fall sein müßte, wenn jeder Strahl einfach periodisch wäre.

§ 120. Nachdem wir den Zusammenhang der den Resonator erregenden Schwingung $\mathfrak{E}_z$ mit der im Vakuum stattfindenden Wärmestrahlung, soweit er sich angeben läßt, festgestellt haben, berechnen wir die entsprechende Schwingung des Resonators, die sich aus (172) und (179) durch einen einfachen Vergleich mit (174) und (175) folgendermaßen ergibt:

$$f(t) = \frac{3c^3}{16\pi^3}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{C_n \sin\gamma_n}{\nu^3}\cos(2\pi\nu t - \vartheta_n - \gamma_n), \tag{187}$$

wobei gesetzt ist:

$$\nu = \frac{n}{\mathfrak{T}} \quad \text{und} \quad \operatorname{ctg}\gamma_n = \frac{\pi\nu_0(\nu_0^2-\nu^2)}{\sigma\nu^3}. \tag{188}$$

Zunächst erkennt man hieraus, wie schon in § 113 bemerkt wurde, daß nur diejenigen in $\mathfrak{E}_z$ enthaltenen Partialschwingungen

merklichen Einfluß auf die Schwingungen des Resonators haben, für welche $\frac{\nu}{\nu_0}$ nahe gleich 1 ist. Wenn ν von einem Werte, der merklich kleiner ist als ν_0, durch ν_0 hindurch zu einem Werte, der merklich größer ist als ν_0, übergeht, so wächst der Winkel γ von 0 durch $\frac{\pi}{2}$ hindurch bis π. Je kleiner das Dämpfungsdekrement σ des Resonators ist, um so schmaler ist das Gebiet der Schwingungszahlen ν, in welchem γ von 0 oder von π merklich verschieden ist, und um so steiler erfolgt innerhalb dieses Gebietes das Anwachsen des Winkels γ von 0 bis π. Jedoch ist wichtig zu bemerken, daß, wie klein auch σ sei, für zwei benachbarte Glieder der Summe $\sum$, z. B. für die Ordnungszahlen n und $n+1$, γ stets nur sehr wenig verschiedene Werte annimmt. Denn es ist nach (188):

$$\operatorname{ctg}\gamma_{n+1} - \operatorname{ctg}\gamma_n = \frac{\pi\mathfrak{T}\nu_0\left(\mathfrak{T}^2\nu_0^2 - (n+1)^2\right)}{\sigma(n+1)^3} - \frac{\pi\mathfrak{T}\nu_0(\mathfrak{T}^2\nu_0^2 - n^2)}{\sigma n^3}$$

$$= -\frac{2\pi}{\sigma\nu_0\mathfrak{T}},$$

also nach (180) klein. Bei dieser Berechnung ist davon Gebrauch gemacht, daß n groß gegen 1 und daß $\frac{\nu}{\nu_0}$ nahe $= 1$.

Man kann also sagen, daß der Winkel γ zwar schnell, aber doch merklich stetig von 0 bis π wächst, wenn ν durch ν_0 hindurchgeht. Ganz anders verhalten sich die Größen C_n und ϑ_n, die sich von einem Glied der Fourierschen Reihe zum andern sprungweise und gänzlich unregelmäßig ändern können.

§ 121. Die vom Resonator in der Zeiteinheit absorbierte Energie ergibt sich nach (170) durch die Bildung des zeitlichen Mittelwertes von $\mathfrak{E}_z f$, wobei $\mathfrak{E}_z$ aus (179), und f aus (187) zu entnehmen ist. Die Berechnung ergibt ganz analog dem Ausdruck (177):

$$\overline{\mathfrak{E}_z f} = \frac{3c^3}{16\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{C_n^2\sin^2\gamma_n}{\nu^2}. \qquad (189)$$

Man ersieht auch hier wieder, daß nur diejenigen Partialschwingungen vom Resonator merklich absorbiert werden, deren Schwingungszahl ν der Eigenschwingungszahl ν_0 des Resonators

nahe liegt; denn nur für diese weicht $\frac{\sin\gamma_n}{\nu}$ merklich von Null ab.

Dividieren wir die vom Resonator absorbierte Energie durch die spezifische Intensität $\mathfrak{K}_0$ der auf ihn treffenden monochromatischen Strahlung von der Schwingungszahl ν_0, so erhalten wir eine Größe, die wir als ein Maß für das Absorptionsvermögen des Resonators ansehen können.

§ 122. Jetzt führen wir den zwar nicht von vornherein selbstverständlichen, aber durch die elementarsten Erfahrungen auf dem Gebiete der Wärmestrahlung bewährten und von uns schon seit dem § 12 fortwährend benutzten Satz ein, daß das Absorptionsvermögen unabhängig ist von der Intensität der auffallenden Strahlung. Für den vorliegenden Fall ergibt sich dann durch Vergleichung von (189) und (186), daß der Quotient

$$\frac{\sum_0^\infty \frac{C_n^2 \sin^2\gamma_n}{\nu^2}}{\mathfrak{T}\,\overline{C_n^2}} = A \tag{190}$$

unabhängig ist von den Amplituden C_n. Der Wert von A läßt sich leicht aus dem speziellen Fall ableiten, daß alle Amplituden C_n einander gleich sind. Dann wird der Mittelwert $\overline{C_n^2}$ gleich C_n^2 selber, und es folgt:

$$A = \frac{1}{\mathfrak{T}} \sum_0^\infty \frac{\sin^2\gamma_n}{\nu^2}.$$

Der Wert der Summe $\sum$ läßt sich am einfachsten berechnen durch Verwandlung in ein Integral. Wir schreiben zunächst:

$$A = \frac{1}{\mathfrak{T}} \sum_0^\infty \frac{\sin^2\gamma_n}{\nu^2} \cdot \Delta n,$$

wobei Δn, die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Ordnungszahlen, gleich 1. Die entsprechenden Schwingungszahlen seien ν und $\nu + d\nu$, dann ist $\frac{\Delta n}{\mathfrak{T}} = d\nu$, und:

$$A = \int_0^\infty \frac{\sin^2\gamma_n}{\nu^2}\, d\nu,$$

wo nun γ_n nach § 120 sich stetig mit ν ändert. Die Substitution von (188) ergibt:

$$A = \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \nu_0^2 (\nu_0^2 - \nu^2)^2}{\sigma^2 \nu^6}}.$$

Zum Werte dieses Integrals tragen nur diejenigen Glieder merklich bei, für welche ν nahezu gleich ν_0 ist. Daher läßt sich einfacher schreiben:

$$A = \frac{1}{\nu_0^2} \int_0^\infty \frac{d\nu}{1 + \frac{4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2}{\sigma^2 \nu_0^2}}$$

und, wenn man statt ν als Integrationsvariable einführt:

$$x = \frac{2\pi(\nu - \nu_0)}{\sigma \nu_0},$$

$$A = \frac{\sigma}{2\pi\nu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\sigma}{2\nu_0}.$$

Somit erhalten wir aus (190):

$$\sum_0^\infty \frac{C_n^2 \sin^2 \gamma_n}{\nu^2} = \frac{\sigma}{2\nu_0} \mathfrak{T} \overline{C_n^2} \tag{191}$$

und aus (186) für die spezifische Intensität der monochromatischen Strahlung von der Schwingungszahl ν_0:

$$\mathfrak{K}_0 = \frac{3c\nu_0}{32\pi^2\sigma} \cdot \sum_0^\infty \frac{C_n^2 \sin^2 \gamma_n}{\nu^2}. \tag{192}$$

Ebensogroß wie die vom Resonator in der Zeiteinheit absorbierte Energie (189) ist wegen des stationären Zustandes die von ihm in der Zeiteinheit emittierte Energie, wie man auch direkt durch Berechnung der Größe (151) mit Benutzung von (187) finden kann.

§ 123. Für den zeitlichen Mittelwert der Energie des Resonators endlich ergibt sich aus (142), (168) und (187) durch einen Vergleich mit (178):

$$U = \frac{3c^3\nu_0}{64\pi^2\sigma} \sum_0^\infty \frac{\nu_0^2 + \nu^2}{\nu^6} C_n^2 \sin^2 \gamma_n$$

oder auch, da zum Wert der Summe nur diejenigen Glieder

merklich beitragen, deren Schwingungszahl ν der Eigenschwingungszahl ν_0 des Resonators nahe liegt:

$$U = \frac{3c^3}{32\pi^2\sigma\nu_0} \sum_0^\infty \frac{C_n^2 \sin^2\gamma_n}{\nu^2}.$$

Durch Vergleich mit (192) ergibt sich so die einfache Beziehung:

$$U = \frac{c^2}{\nu_0^2} \mathfrak{K}_0 \tag{193}$$

zwischen der mittleren Schwingungsenergie des Resonators und der spezifischen Strahlungsintensität eines monochromatischen geradlinig polarisierten Strahles von der Periode des Resonators. Hierbei ist besonders bemerkenswert, daß die Dämpfungskonstante σ des Resonators in diese Relation gar nicht eingeht.

Ferner erhält man mit Rücksicht auf (24):

$$U = \frac{c^3 u_0}{8\pi\nu_0^2} \tag{194}$$

als Beziehung zwischen der mittleren Energie des Resonators und der räumlichen Strahlungsdichte der Schwingungszahl ν_0 im stationären Strahlungszustand.

Endlich ergibt sich durch Vergleichung mit (185):

$$U = \frac{3c^3 \mathfrak{T}}{64\pi^2\nu_0^2} \cdot \overline{C_n^2}, \tag{195}$$

wodurch die Energie des Resonators direkt in Zusammenhang gebracht wird mit der elektrischen Feldstärke (179) der ihn erregenden Welle. Der Mittelwert von C_n^2 ist, wie in (185), zu bilden aus einer großen Anzahl von Partialschwingungen, deren Schwingungszahlen ν der Eigenzahl ν_0 des Resonators nahe liegen.

§ 124. Wir denken uns nun mit dem betrachteten System, das aus einem gleichmäßig durchstrahlten, von vollständig und diffus reflektierenden Wänden begrenzten Vakuum und dem darin befindlichen ruhenden Resonator besteht, eine unendlich kleine reversible Zustandsänderung vorgenommen, etwa so, daß wir die Strahlung adiabatisch und unendlich langsam komprimieren, wie das im vorigen Abschnitt beschrieben wurde. Dann bleibt nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik die Gesamtentropie des Systems ungeändert, dagegen wird durch

die Kompression die Intensität $\mathfrak{K}$ jeder einzelnen Schwingungszahl verändert, und infolgedessen auch die Energie U des Resonators. Denn diese ist im stationären Zustand nach (193) proportional der Intensität $\mathfrak{K}_0$ der ihn erregenden monochromatischen Strahlung. Der Resonator wird also einen Teil der durch die Kompression erzeugten Strahlungsenergie absorbieren und diesen Energiebetrag der freien Wärmestrahlung im Vakuum entziehen.

Zur bequemeren Übersicht können wir uns jeden unendlich kleinen Kompressionsvorgang so in zwei Epochen zerlegt denken, daß in der ersten Epoche die Kompression stattfindet und dabei die Strahlung sich verhält, als ob der Resonator gar nicht vorhanden wäre, und daß dann in der zweiten Epoche der Resonator soviel Energie aus der ihn erregenden Strahlung absorbiert, daß die durch die Vorgänge der ersten Epoche gestörte Beziehung (193) wieder in Gültigkeit tritt. Während der ersten Epoche bleibt nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts die Entropie der Wärmestrahlung im Vakuum für sich konstant; während der zweiten Epoche aber ändert sich die Entropie der Wärmestrahlung durch Abgabe von Wärme an den Resonator. Da nun die Gesamtentropie des Systems konstant bleiben muß, so folgt daraus, daß nicht nur der freien Wärmestrahlung, sondern auch dem Resonator eine Entropie zukommt, deren Änderung die Entropieänderung der freien Wärmestrahlung gerade kompensiert. Da der thermodynamische Zustand des Resonators allein von seiner Energie U abhängt, so ist auch die Entropie S des Resonators durch U bestimmt.

§ 125. Es ist leicht, die Beziehung zwischen der Entropie des Resonators und der räumlichen Entropiedichte der monochromatischen Vakuumstrahlung von der Schwingungszahl ν_0 im stationären Zustand aufzustellen. Denn nach dem zweiten Hauptsatz ist der stationäre Zustand unter allen Zuständen dadurch ausgezeichnet, daß in ihm die Gesamtentropie des Systems ein Maximum besitzt. Die Gesamtentropie besteht aber aus der Entropie des Resonators: S, und aus der Entropie (113) der äußeren Strahlung:

$$V \cdot \int_0^\infty \mathfrak{H}\, d\nu,$$

wobei V das Volumen des gleichmäßig durchstrahlten Vakuums bedeutet. Dann ist also für den absolut stabilen Strahlungszustand, d. h. für einen Resonator in einem von schwarzer Strahlung erfüllten Vakuum von bestimmtem Volumen:

$$\delta S + V \int_0^\infty \delta \mathfrak{s} \, d\nu = 0$$

oder:

$$\frac{dS}{dU} \delta U + V \int_0^\infty \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial \mathfrak{u}} \delta \mathfrak{u} \, d\nu = 0 .$$

Die einzige Bedingung, welcher die Variation δ zu genügen hat, ist die, daß die Gesamtenergie des Systems die nämliche bleibt, also:

$$\delta U + V \int_0^\infty \delta \mathfrak{u} \, d\nu = 0 .$$

Wir wollen nun die räumliche Energiedichte $\mathfrak{u}$ und infolgedessen auch die räumliche Entropiedichte $\mathfrak{s}$ aller Strahlenarten unvariiert lassen bis auf einen schmalen Spektralbezirk in der Umgebung der Schwingungszahl ν_0, von der Breite $\Delta \nu_0$, wobei $\Delta \nu_0$ klein gegen ν_0, im übrigen aber beliebig ist. Dann reduzieren sich die letzten Gleichungen auf:

$$\frac{dS}{dU} \delta U + V \frac{\partial \mathfrak{s}_0}{\partial \mathfrak{u}_0} \delta \mathfrak{u} \, \Delta \nu_0 = 0$$

und

$$\delta U + V \, \delta \mathfrak{u} \, \Delta \nu_0 = 0 .$$

Hieraus folgt:

(196)
$$\frac{dS}{dU} = \frac{\partial \mathfrak{s}_0}{\partial \mathfrak{u}_0} .$$

Die vier Größen S, U, $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{u}_0$ hängen, bei gegebenem ν_0, von einer einzigen Variabeln ab. Denn S ist eine bestimmte Funktion von U, $\mathfrak{s}_0$ eine solche von $\mathfrak{u}_0$, und U ist mit $\mathfrak{u}_0$ durch die Beziehung (194) verbunden. Man kann daher, bei konstantem ν_0, auch schreiben:

$$\frac{dS}{d\mathfrak{s}_0} = \frac{dU}{d\mathfrak{u}_0} = \frac{c^3}{8\pi\nu_0^2}$$

und erhält hieraus durch Integration, mit Fortlassung der physikalisch bedeutungslosen Integrationskonstanten:

$$S = \frac{c^3}{8\pi\nu_0^2}\mathfrak{S}_0 \tag{197}$$

als Beziehung zwischen der Entropie des Resonators und der räumlichen Dichte der Strahlungsentropie von der Schwingungszahl ν_0 im stationären Zustand. Ferner nach (133):

$$S = \frac{c^2}{\nu_0^2}\mathfrak{L}_0 \tag{198}$$

als Beziehung zwischen der Entropie des Resonators und der spezifischen Intensität der monochromatischen geradlinig polarisierten Entropiestrahlung von der Schwingungszahl ν_0.

§ 126. Die Gleichung (196) besitzt eine einfache physikalische Bedeutung, sie liefert nämlich mit Rücksicht auf (117):

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}, \tag{199}$$

wobei T die Temperatur der den Resonator erregenden Strahlung bedeutet. Wenn wir also allgemein den reziproken Wert der Größe $\frac{dS}{dU}$, welche nur von der Energie und der natürlichen Beschaffenheit des Resonators abhängt, als „Temperatur des Resonators" definieren, so gilt der Satz, daß im stationären Strahlungszustand die Temperatur des Resonators gleich ist der Temperatur der ihn erregenden monochromatischen Strahlung.

§ 127. Über die Abhängigkeit der Entropie S eines Resonators von seiner Energie U kann man etwas erfahren aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz, indem man etwa in die Form (134) desselben $\nu = \nu_0$, und für $\mathfrak{L}_0$ und $\mathfrak{K}_0$ die sich aus (198) und (193) ergebenden Werte setzt. Man erhält dann:

$$S = F\left(\frac{U}{\nu_0}\right), \tag{200}$$

wobei die Funktion F außer ihrem Argument nur universelle Konstante enthält, also namentlich auch keine auf die natürliche Beschaffenheit des Resonators bezügliche Konstante. Dies ist die einfachste unter allen bisher von uns aufgestellten Formen des Wienschen Verschiebungsgesetzes, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c in ihr überhaupt nicht, und die Schwingungszahl ν_0 nur ein einziges Mal in der ersten Potenz vorkommt. Es ist auch leicht zu ver-

stehen, daß die Einfachheit der mathematischen Relation ihren Grund haben wird in der Einfachheit des durch die Resonatorschwingungen dargestellten physikalischen Vorganges.

Dieser Umstand läßt darauf schließen, daß von dieser einfachen Beziehung aus am ehesten ein Einblick in die Natur der Verschiebungsfunktion F zu gewinnen sein wird. Wenn die analytische Form dieser universellen Funktion gefunden ist, so ergibt sich nach § 92 f. ohne weiteres daraus das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum. Eine Lösung dieser Aufgabe scheint aber nicht möglich zu sein ohne ein näheres Eingehen auf den Begriff der Entropie, und dieser Begriff wird, vom Standpunkte der elektromagnetischen Strahlungstheorie aus, erst dann vollkommen verständlich, wenn man ihn mit dem der Wahrscheinlichkeit in Zusammenhang bringt, wie im nächsten Abschnitt näher ausgeführt werden soll.

Vierter Abschnitt.

Entropie und Wahrscheinlichkeit.

Erstes Kapitel. Einleitung. Grundlegende Sätze und Definitionen.

§ 128. Da mit der Einführung von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen in die elektromagnetische Strahlungstheorie ein vollkommen neues, den Grundlagen der Elektrodynamik gänzlich fremdes Element in den Bereich der Untersuchungen eintritt, so erhebt sich gleich zu Beginn dieses Abschnitts die prinzipielle Vorfrage nach der Berechtigung und nach der Notwendigkeit solcher Betrachtungen. Man könnte nämlich bei oberflächlicher Überlegung leicht zu der Schlußfolgerung neigen, daß für Wahrscheinlichkeitsrechnungen in einer rein elektrodynamischen Theorie überhaupt kein Platz vorhanden wäre. Denn da die elektromagnetischen Feldgleichungen zusammen mit den Anfangs- und den Grenzbedingungen den zeitlichen Verlauf eines elektrodynamischen Vorganges bekanntlich eindeutig bestimmen, so wären Betrachtungen, die außerhalb der Feldgleichungen stehen, prinzipiell unberechtigt, in jedem Falle aber entbehrlich. Entweder führen sie nämlich zu denselben Ergebnissen wie die elektrodynamischen Grundgleichungen — dann wären sie überflüssig; oder sie führen zu anderen Ergebnissen — dann wären sie unrichtig.

Trotz dieses scheinbar unausweichlichen Dilemmas steckt in jener Überlegung doch eine Lücke. Denn die Ergebnisse, zu denen in der elektromagnetischen Wärmestrahlungstheorie die elektrodynamischen Grundgleichungen allein genommen führen, sind keineswegs eindeutig, sondern sie sind im Gegenteil vieldeutig, und sogar von unendlich hoher Ordnung vieldeutig. Knüpfen wir, um dies einzusehen, an das spezielle im letzten

Kapitel betrachtete Beispiel an, daß ein Resonator von der dort betrachteten elementaren Art sich in einem nach allen Richtungen gleichmäßig durchstrahlten Vakuum befindet. Wir zogen dort den Schluß, daß sich im Laufe der Zeit ein stationärer Schwingungszustand herstellt, in welchem die vom Resonator in der Zeiteinheit absorbierte und emittierte Energie einen konstanten, der Intensität $\mathfrak{K}_0$ der ihn erregenden monochromatischen Strahlung proportionalen Wert besitzt. Aber diesen Schluß konnten wir, wie zu Beginn des § 122 ausdrücklich hervorgehoben wurde, nur thermodynamisch, keineswegs elektrodynamisch begründen, während man doch vom Standpunkt der elektrodynamischen Strahlungstheorie aus verlangen müßte, daß, wie alle Begriffe, so auch alle Sätze der Wärmestrahlung aus rein elektrodynamischen Überlegungen heraus entwickelt werden. Wollte man nun versuchen, den allgemeinen Zusammenhang zwischen der vom Resonator absorbierten Energie und der Intensität der ihn erregenden Strahlung ganz ohne die Einmischung thermodynamischer Erfahrungen auf rein elektrodynamischem Wege abzuleiten, so würde man bald finden, daß es einen solchen allgemeinen Zusammenhang gar nicht gibt, oder mit anderen Worten, daß man über die vom Resonator absorbierte Energie, bei gegebener Intensität der ihn erregenden Strahlung, vom Standpunkt der reinen Elektrodynamik aus überhaupt gar nichts aussagen kann, solange von den Werten der Amplituden C_n und der Phasenkonstanten ϑ_n der einzelnen in der erregenden Strahlung enthaltenen Partialschwingungen nichts Näheres bekannt ist. Denn sowohl die absorbierte Energie als auch die Intensität der erregenden Strahlung werden durch gewisse Mittelwerte dargestellt, die aus den Größen C_n und ϑ_n jedesmal in verschiedener Weise zu bilden sind, und die daher nicht allgemein aus einander berechnet werden können, ebensowenig, wie man etwa den Mittelwert von C_n aus dem Mittelwert von C_n^2 allgemein berechnen kann. Wenn also auch die Intensität der Strahlung, die von allen Seiten auf den Resonator fällt, für alle Spektralbezirke als Funktion der Richtung und eventuell der Zeit vollständig gegeben ist, und auch der Anfangszustand des Resonators bekannt ist, so lassen sich die Schwingungen des Resonators daraus doch noch nicht eindeutig berechnen, auch nicht annähernd, auch nicht für hinreichend lange Zeitepochen. Viel-

mehr kann der Resonator, falls über die Einzelwerte der C_n und ϑ_n geeignet verfügt wird, durch die nämliche auffallende Strahlungsintensität zu gänzlich verschiedenartigen Schwingungen veranlaßt werden. Ja, wir werden später, im ersten Kapitel des nächsten Abschnitts, einen speziellen, mit allen elektrodynamischen Gesetzen vollkommen verträglichen Vorgang näher besprechen, wo der Resonator, so seltsam das klingt, die von allen Seiten auf ihn fallende Strahlung vollständig und fortwährend absorbiert, ohne überhaupt jemals die geringste Menge Energie auszustrahlen (§ 172); ferner auch einen anderen Vorgang, wo die vom Resonator absorbierte Energie sogar negativ ist,[1] wo also die auffallende Strahlung dem Resonator Energie entzieht, bis seine Energie gleich Null wird! (§ 173)

An einem einzigen solchen Beispiel sehen wir, daß durch die Intensität der erregenden Strahlung die Schwingungen des Resonators noch keineswegs bestimmt sind, und daß daher in einem Falle, wo nach den Gesetzen der Thermodynamik und nach allen Erfahrungen ein eindeutiges Resultat zu erwarten ist, die reine Elektrodynamik vollkommen im Stiche läßt, da für sie die vorliegenden Daten noch lange nicht hinreichen, um die in den elektrodynamischen Differentialgleichungen auftretenden Konstanten eindeutig zu bestimmen.

§ 129. Ehe wir diesen Umstand und die damit für die elektrodynamische Theorie der Wärmestrahlung verbundene Schwierigkeit weiter verfolgen, möge darauf hingewiesen werden, daß bei der mechanischen Wärmetheorie, speziell der kinetischen Gastheorie, genau der gleiche Umstand und die gleiche Schwierigkeit vorliegt. Denn wenn etwa in einem strömenden Gase zur Zeit $t = 0$ an jeder Stelle die Geschwindigkeit, die Dichte und die Temperatur des Gases gegeben ist und außerdem die Grenzbedingungen vollständig bekannt sind, so wird man nach allen Erfahrungen erwarten, daß dadurch der zeitliche Verlauf des Vorganges eindeutig bestimmt ist. Vom rein mechanischen Standpunkt aus ist das aber keineswegs der Fall; denn durch die sichtbare Geschwindigkeit, die Dichte und die Temperatur des Gases sind noch lange nicht die Orte und die Geschwindigkeiten aller einzelnen Moleküle gegeben, und diese müßte man

[1] Vgl. die Anmerkung zu § 111.

genau kennen, wenn man aus den Bewegungsgleichungen den zeitlichen Verlauf des Vorganges vollständig berechnen wollte. Auch hier läßt sich leicht zeigen, daß bei den nämlichen Werten der sichtbaren Geschwindigkeit, der Dichte und der Temperatur unendlich viele gänzlich verschiedenartige Vorgänge mechanisch möglich sind, von denen einige den Grundsätzen der Thermodynamik, namentlich dem zweiten Hauptsatz, direkt widersprechen.

§ 130. Aus diesen Überlegungen sehen wir, daß, wenn es sich um die Berechnung des zeitlichen Verlaufs eines thermodynamischen Vorganges handelt, sowohl die mechanische Wärmetheorie als auch die elektrodynamische Theorie der Wärmestrahlung mit derjenigen Formulierung der Anfangs- und Grenzbedingungen, welche in der Thermodynamik zur eindeutigen Bestimmung des Vorganges vollkommen hinreicht, keineswegs auskommt, sondern daß vom Standpunkt der reinen Mechanik bez. Elektrodynamik betrachtet noch unendlich viele Lösungen des Problems existieren. Infolgedessen bleibt, falls man nicht überhaupt ganz darauf verzichten will, die thermodynamischen Vorgänge mechanisch bez. elektrodynamisch zu begreifen, nur die eine Möglichkeit übrig, durch Einführung von besonderen ergänzenden Hypothesen die Anfangs- und Grenzbedingungen insoweit näher zu präzisieren, daß die mechanischen oder elektrodynamischen Gleichungen auf ein eindeutiges und mit der Erfahrung übereinstimmendes Resultat führen. Wie man eine derartige Hypothese zu formulieren hat, dafür läßt sich aus den Prinzipien der Mechanik oder Elektrodynamik selber natürlicherweise kein Anhaltspunkt gewinnen; denn diese lassen ja gerade den Fall ganz offen. Ebendeswegen ist aber auch von vornherein jede mechanische oder elektrodynamische Hypothese zulässig, welche eine nähere, durch direkte Messungen gar nicht kontrollierbare Spezialisierung der gegebenen Anfangs- und Grenzbedingungen enthält. Welcher Hypothese vor den übrigen der Vorzug zu geben ist, darüber kann die Entscheidung nur dadurch gewonnen werden, daß man die Resultate, zu denen die Hypothese führt, hinterher im Lichte der thermodynamischen Erfahrungssätze prüft.

§ 131. Nun ist es sehr bemerkenswert, daß, obwohl hiernach die definitive Prüfung der verschiedenen zulässigen Hypothesen erst a posteriori erfolgen kann, man doch schon durch

eine Betrachtung a priori, ohne sich irgendwie auf die Thermodynamik zu stützen, einen festen Anhaltspunkt für den Inhalt der aufzustellenden Hypothese gewinnen kann. Fassen wir nämlich einmal wieder das obige Beispiel (§ 128) ins Auge, daß ein Resonator bei gegebenem Anfangszustand einer Strahlung von gegebener Intensität ausgesetzt ist. Dann ist, wie damals besprochen wurde, der Schwingungsvorgang im Resonator, solange man die unkontrollierbaren Einzelwerte der C_n und ϑ_n in der erregenden Strahlung ganz offen läßt, unendlich vieldeutig. Wenn man nun aber alle die unendlich verschiedenen Fälle, wie sie den verschiedenen bei der gegebenen Strahlungsintensität möglichen Werten der C_n und ϑ_n entsprechen, näher untersucht, und die Resultate, zu denen sie einzeln führen, miteinander vergleicht, so findet man, daß die ungeheure Mehrzahl dieser Fälle in den Mittelwerten zu ganz übereinstimmenden Resultaten führt, während diejenigen Fälle, in denen sich merkliche Abweichungen zeigen, nur in verhältnismäßig verschwindend geringer Anzahl auftreten, nämlich dann, wenn gewisse ganz spezielle weitgehende Bedingungen zwischen den einzelnen Größen C_n und ϑ_n erfüllt sind. Nimmt man also an, daß solche spezielle Bedingungen nicht gelten, so ergibt sich, wie verschieden auch die Konstanten C_n und ϑ_n im übrigen gewählt werden mögen, für den Resonator eine Schwingung, die, wenn auch natürlich nicht in allen Einzelheiten, so doch in bezug auf alle meßbaren Mittelwerte — und diese sind die einzigen, welche kontrolliert werden können — eine ganz bestimmte genannt werden kann. Und, was nun das Bemerkenswerte dabei ist: gerade die auf diese Weise erhaltene Schwingung entspricht den Forderungen des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, wie im nächsten Abschnitt näher ausgeführt werden wird (vgl. § 182).

In der Mechanik verhält es sich genau ebenso. Wenn man, um auf das vorige Beispiel (§ 129) zurückzukommen, alle nur denkbaren Lagen und Geschwindigkeiten der einzelnen Gasmoleküle ins Auge faßt, die mit den gegebenen Werten der sichtbaren Geschwindigkeit, der Dichte und der Temperatur des Gases verträglich sind, und für jede Kombination derselben den mechanischen Vorgang genau nach den Bewegungsgleichungen berechnet, so findet man ebenfalls, daß in der ungeheuren Mehrzahl der Fälle Vorgänge resultieren, die, wenn auch nicht in

den Einzelheiten, so doch in allen meßbaren Mittelwerten miteinander übereinstimmen, und die außerdem dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik Genüge leisten. Nur einige wenige besondere Fälle, in denen zwischen den Koordinaten und den Geschwindigkeiten der Moleküle ganz spezielle Bedingungen bestehen, liefern abweichende Ergebnisse.

§ 132. Nach diesen Betrachtungen ist klar, daß die Hypothesen, deren Einführung oben als notwendig nachgewiesen wurde, ihren Zweck vollständig erfüllen, wenn ihr Inhalt nichts weiter besagt, als daß derartige besondere Fälle, die speziellen Bedingungen zwischen den einzelnen direkt nicht kontrollierbaren Konstanten entsprechen, in der Natur nicht vorkommen. In der Mechanik leistet dies die Hypothese,[1] daß die Wärmebewegungen „molekular-ungeordnet" sind, in der Elektrodynamik leistet das Entsprechende die Hypothese der „natürlichen Strahlung", welche besagt, daß zwischen den zahlreichen verschiedenen Partialschwingungen (179) eines Strahles keine anderen Beziehungen bestehen, als diejenigen, welche durch die meßbaren Mittelwerte bedingt sind (§ 181). Wenn wir zur Abkürzung alle Zustände und alle Vorgänge, für welche eine solche Hypothese gilt, als „elementar ungeordnet" bezeichnen, so liefert der Satz, daß in der Natur alle Zustände und alle Vorgänge, welche zahlreiche unkontrollierbare Bestandteile enthalten, elementar ungeordnet sind, die Vorbedingung, aber auch die sichere Gewähr für die eindeutige Bestimmbarkeit der meßbaren Vorgänge, sowohl in der Mechanik als auch in der Elektrodynamik, und zugleich für die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, womit dann selbstverständlich auch der für den zweiten Hauptsatz charakteristische Begriff der Entropie und der damit unmittelbar verbundene der Temperatur seine mechanische bez. elektrodynamische Erklärung finden muß. Zugleich folgt hieraus, daß die Begriffe der Entropie und der Temperatur ihrem Wesen nach an die Bedingung der elementaren Unordnung geknüpft sind. Eine rein periodische absolut ebene Welle besitzt weder Entropie noch Temperatur, weil sie

[1] L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, **1**, p. 21, 1896. Wiener Sitzungsber., **78**, Juni 1878, am Schluß. Vgl. auch S. H. Burbury, Nature, **51**, p. 78, 1894.

gar keine unkontrollierbaren Größen enthält, also auch nicht elementar ungeordnet sein kann, ebensowenig wie das bei der Bewegung eines einzelnen starren Atoms der Fall ist. Erst das unregelmäßige Zusammenwirken sehr vieler Partialschwingungen verschiedener Perioden, die sich unabhängig voneinander nach den verschiedenen Richtungen des Raumes fortpflanzen, oder das ungeregelte Durcheinanderschwirren sehr vieler Atome schafft die Vorbedingung für die Gültigkeit der Hypothese der elementaren Unordnung und somit für die Existenz einer Entropie und einer Temperatur.

§ 133. Welche mechanische bez. elektrodynamische Größe stellt nun aber die Entropie eines Zustandes dar? Offenbar hängt diese Größe irgendwie mit der „Wahrscheinlichkeit" des Zustandes zusammen. Denn da die elementare Unordnung und der Mangel jeglicher Einzelkontrolle zum Wesen der Entropie gehört, so können nur kombinatorische oder Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen die nötigen Anhaltspunkte zur Berechnung ihrer Größe liefern. Schon die Hypothese der elementaren Unordnung selbst ist ja ihrem Wesen nach ein Wahrscheinlichkeitssatz, da sie aus einer ungeheuren Anzahl von gleichmöglichen Fällen eine bestimmte Anzahl herausgreift und dieselben als in der Natur nicht existent bezeichnet.

Da nun der Begriff der Entropie, ebenso wie der Inhalt des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, ein universeller ist, und da andererseits die Wahrscheinlichkeitssätze nicht minder universelle Bedeutung besitzen, so ist zu vermuten, daß der Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit ein sehr enger sein wird. Wir stellen daher unseren ferneren Ausführungen folgenden Satz an die Spitze: Die Entropie eines physikalischen Systems in einem bestimmten Zustand hängt lediglich ab von der Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes. Die Zulässigkeit und Fruchtbarkeit dieses Satzes wird sich später in verschiedenen Fällen zeigen. Einen allgemeinen strengen Beweis desselben zu liefern werden wir aber hier nicht versuchen. Ja, ein derartiger Versuch würde offenbar an dieser Stelle nicht einmal einen Sinn haben. Denn solange die „Wahrscheinlichkeit" eines Zustandes nicht zahlenmäßig definiert ist, läßt sich der obige Satz auch nicht zahlenmäßig auf seine Richtigkeit prüfen. Man könnte sogar vielleicht auf

den ersten Blick vermuten, daß er aus diesem Grunde überhaupt keinen bestimmten physikalischen Inhalt besitzt. Indessen läßt sich durch eine einfache Deduktion zeigen, daß man, ohne noch auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit eines Zustandes näher einzugehen, auf Grund des obigen Satzes doch schon in der Lage ist, die Art der Abhängigkeit der Entropie von der Wahrscheinlichkeit ganz allgemein zu fixieren.

§ 134. Bezeichnet nämlich S die Entropie, W die Wahrscheinlichkeit eines physikalischen Systems in einem bestimmten Zustand, so besagt der obige Satz, daß

$$S = f(W), \tag{201}$$

wobei $f(W)$ eine universelle Funktion des Arguments W bedeutet. Wie man nun auch W näher definieren möge, soviel läßt sich jedenfalls dem mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffe als feststehend entnehmen, daß die Wahrscheinlichkeit eines Systems, das aus zwei voneinander ganz unabhängigen Systemen zusammengesetzt ist, gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten der beiden Einzelsysteme ist. Denken wir uns z. B. als erstes System irgendeinen Körper auf der Erde, als zweites System einen durchstrahlten Hohlraum auf dem Sirius, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich der irdische Körper in einem bestimmten Zustand 1, und zugleich die Hohlraumstrahlung in einem bestimmten Zustand 2 befindet:

$$W = W_1 \cdot W_2, \tag{202}$$

wenn W_1 und W_2 die Wahrscheinlichkeiten dafür sind, daß sich das betreffende System in dem betreffenden Zustande befindet. Sind nun S_1 und S_2 die Entropien der Einzelsysteme in den beiden Zuständen, so ist nach (201):

$$S_1 = f(W_1), \quad S_2 = f(W_2).$$

Aber nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ist die Gesamtentropie beider voneinander unabhängigen Systeme: $S = S_1 + S_2$, folglich nach (201) und (202):

$$f(W_1 W_2) = f(W_1) + f(W_2).$$

Aus dieser Funktionalgleichung läßt sich f berechnen. Differentiiert man nämlich auf beiden Seiten nach W_1, bei konstantem W_2, so kommt:

$$W_2 f'(W_1 W_2) = f'(W_1).$$

Differentiiert man ferner nach W_2, bei konstantem W_1, so kommt:

$$f'(W_1 W_2) + W_1 W_2 f'(W_1 W_2) = 0$$

oder

$$f'(W) + W f'(W) = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ist:

$$f(W) = k \log W + \text{const.} \qquad \text{Also nach (201):}$$

$$S = k \log W + \text{const}, \qquad (203)$$

wodurch die Abhängigkeit der Entropie von der Wahrscheinlichkeit allgemein bestimmt ist. Die universelle Integrationskonstante k ist für ein irdisches System dieselbe wie für ein kosmisches, und wenn ihr numerischer Wert für dieses bestimmt ist, gilt er auch für jenes. Die zweite, additive, Integrationskonstante hat, weil die Entropie S eine willkürliche additive Konstante enthält, keine physikalische Bedeutung, und kann nach Belieben fortgelassen werden.

§ 135. Die Beziehung (203) enthält eine allgemeine Methode, um den Ausdruck der Entropie S durch Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen zu berechnen. Doch wird dieselbe natürlich erst dann von praktischem Nutzen, wenn die Größe W der Wahrscheinlichkeit eines physikalischen Systems in einem gegebenen Zustand zahlenmäßig angegeben werden kann. Die Aufsuchung der allgemeinsten und präzisesten Definition dieser Größe gehört zu den wichtigsten Aufgaben der mechanischen bez. elektrodynamischen Wärmetheorie. Zunächst erfordert sie ein näheres Eingehen auf den Begriff des „Zustandes" eines physikalischen Systems.

Unter dem „Zustand" eines physikalischen Systems zu einer bestimmten Zeit verstehen wir den Inbegriff aller derjenigen voneinander unabhängigen Größen, durch welche der zeitliche Verlauf der in dem System stattfindenden Vorgänge, soweit sie der Messung zugänglich sind, bei gegebenen Grenzbedingungen eindeutig bestimmt wird; die Kenntnis des Zustandes ist also genau äquivalent der Kenntnis der „Anfangsbedingungen". Daher ist z. B. bei einem aus unveränderlichen Molekülen bestehenden Gase der Zustand bestimmt durch das Gesetz der Raum- und Geschwindigkeitsverteilung, d. h. durch die Angabe der Anzahl der Moleküle, deren Koordinaten und Geschwindigkeitskompo-

nenten innerhalb je eines einzelnen kleinen „Intervalls“ oder „Gebietes“ liegen. Die auf die verschiedenen Gebiete entfallenden Molekülzahlen sind im allgemeinen ganz unabhängig voneinander, da der Zustand ja kein Gleichgewichts- oder stationärer Zustand zu sein braucht; sie müssen also alle einzeln bekannt sein, wenn der Zustand des Gases als gegeben betrachtet werden soll. Dagegen ist es für die Charakterisierung des Zustandes nicht erforderlich, nähere Details bezüglich der innerhalb eines einzelnen Elementargebiets befindlichen Moleküle anzugeben; denn hier tritt als Ergänzung die Hypothese der molekularen Unordnung ein, welche trotz der mechanischen Unbestimmtheit die Eindeutigkeit des zeitlichen Vorganges verbürgt.

Bei einem Licht- oder Wärmestrahl ist der Zustand bestimmt durch die Richtung, die spektrale Energieverteilung und den Polarisationszustand (§ 17). Näheres über die Amplituden und Phasen der einzelnen periodischen Partialschwingungen des Strahles zu wissen ist nicht nötig, da auch hier die Hypothese der elementaren Unordnung als Ergänzung eingreift.

Man sieht, daß der so definierte Zustandsbegriff, im statistischen Sinne, wohl zu unterscheiden ist von dem Zustandsbegriff im absolut mechanischen oder elektrodynamischen Sinne, nach welchem ein Zustand erst dann als gegeben betrachtet werden darf, wenn die Koordinaten und Geschwindigkeitskomponenten jedes einzelnen Moleküls, bez. die Amplituden und Phasen aller einzelnen Partialschwingungen genau bekannt sind. In einem derartigen Zustand würden gar keine unkontrollierbaren Elemente mehr vorkommen und daher auch keinerlei Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen am Platze sein.

§ 136. Wenn wir nun von der Wahrscheinlichkeit W eines bestimmten elementar ungeordneten Zustandes reden, so ist damit ausgedrückt, daß ein solcher Zustand auf verschiedene Arten realisiert werden kann. Denn jeder Zustand, der viele gleichartige unkontrollierbare Bestandteile enthält, entspricht einer gewissen „Verteilung“, nämlich im ersten Beispiel der Verteilung der Koordinaten und der Geschwindigkeitskomponenten auf die Gasmoleküle, im zweiten Beispiel der Verteilung der Amplituden und Phasen auf die einzelnen Partialschwingungen. Eine Verteilung ist aber immer eine Zuordnung einer Gruppe von unter sich gleichartigen Elementen (Koordinaten, Geschwindigkeits-

komponenten, Amplituden, Phasen) zu einer anderen Gruppe von unter sich gleichartigen Elementen (Molekülen, Partialschwingungen). Solange man nun einen bestimmten Zustand ins Auge faßt, kommt es offenbar nur darauf an, wieviel Elemente der beiden Gruppen einander wechselseitig zugeordnet sind, nicht aber darauf, welche individuellen Elemente der einen Gruppe bestimmten individuellen Elementen der anderen Gruppe zugeordnet sind. Daher kann ein bestimmter Zustand durch eine große Anzahl voneinander verschiedener individueller Zuordnungen zustande kommen. Nennen wir also jede besondere Verteilung, bei der die Elemente der einen Gruppe den Elementen der anderen Gruppe individuell zugeordnet sind, eine „Komplexion", so enthält ein bestimmter Zustand im allgemeinen eine große Anzahl von verschiedenen Komplexionen. Diese Zahl, d. h. die Anzahl der Komplexionen, welche ein gegebener Zustand umfaßt, definieren wir nun als die Wahrscheinlichkeit W des Zustandes, und erhalten dadurch ein Mittel, um in gegebenen Fällen W und dann aus (203) die Entropie S des Zustandes zu berechnen. Nähere Erläuterungen über die Art dieser Berechnung werden in den nächsten beiden Kapiteln ausführlich zur Sprache kommen.

§ 137. Hier sei nur noch auf einen Punkt hingewiesen, in dem sich die hier gebrauchte Definition der Wahrscheinlichkeit von der sonst üblichen der mathematischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses unterscheidet. Die letztere wird bekanntlich als ein echter Bruch definiert, nämlich als der Quotient aus der Anzahl der dem Ereignis günstigen durch die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle. Im Unterschied davon wird hier die Wahrscheinlichkeit W eines physikalischen Zustandes durch eine ganze Zahl, und zwar durch eine große Zahl ausgedrückt. Man könnte versucht sein, den Unterschied der beiden Definitionen dadurch zu beseitigen, daß man die Anzahl der Komplexionen, welche ein Zustand umfaßt, noch dividiert durch die Anzahl „aller möglichen" Komplexionen, und diesen Quotienten als die Wahrscheinlichkeit des Zustandes bezeichnet. Allein es würden hier bei der Frage nach der Anzahl aller möglichen Komplexionen unter Umständen Schwierigkeiten entstehen, die wir lieber vermeiden wollen, indem wir jene Frage gar nicht aufwerfen und bei der oben gegebenen Definition der Wahrscheinlichkeit W

eines Zustandes stehen bleiben. Für die Berechnung der Entropie wird der besprochene Unterschied ohnehin belanglos, da er nach (203) nur auf die Hinzufügung einer additiven negativen Konstanten hinausläuft.

Zweites Kapitel. Entropie eines idealen einatomigen Gases.

§ 138. Im vorigen Kapitel wurde die Berechtigung und die Notwendigkeit der Einführung von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen in die mechanische und in die elektrodynamische Theorie der Wärme nachgewiesen, und aus dem allgemeinen Zusammenhang der Entropie S mit der Wahrscheinlichkeit W, welcher in der Gleichung (203) ausgedrückt ist, eine Methode abgeleitet, um die Entropie eines physikalischen Systems in einem gegebenen Zustand zu berechnen. Bevor nun diese Methode zur Bestimmung der Entropie der strahlenden Wärme angewendet wird, soll sie in diesem Kapitel dazu benutzt werden, um die Entropie eines idealen einatomigen Gases in einem beliebig gegebenen Zustand zu berechnen. Alles Wesentliche dieser Berechnung findet sich zwar schon in den zum Teil noch weiter ausgreifenden Untersuchungen von L. Boltzmann[1] über die mechanische Theorie der Wärme; indessen wird es sich doch empfehlen, hier auf jenen ganz einfachen Fall besonders einzugehen, einmal um die Berechnungsweise und die physikalische Bedeutung der mechanischen Entropie mit derjenigen der Strahlungsentropie bequemer vergleichen zu können, dann aber hauptsächlich deshalb, um die Bedeutung der universellen Konstanten k der Gleichung (203) in der kinetischen Gastheorie klar hervortreten zu lassen; und dazu genügt natürlich die Behandlung eines einzigen speziellen Falles.

§ 139. Wir denken uns ein ideales, aus N gleichartigen einatomigen Molekülen bestehendes Gas in einem gegebenen Zustand und fragen nach der Entropie des Gases in diesem Zustand. Da der Zustand als gegeben vorausgesetzt ist, so ist das Gesetz der Raum- und der Geschwindigkeitsverteilung als bekannt anzunehmen (§ 135). Betrachten wir also das Raum-

[1] L. Boltzmann, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Wien (II) **76**, p. 373, 1877. Vgl. auch Gastheorie **1**, p. 38, 1896.

gebiet, welches durch die Raumkoordinaten x, y, z und ihre Differentiale dx, dy, dz, und das Geschwindigkeitsgebiet, welches durch die Geschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ und ihre Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ charakterisiert wird, so ist die Anzahl der Moleküle, deren Koordinaten und Geschwindigkeiten zugleich in diesen beiden Gebieten liegen, als gegeben anzusehen. Die Ausdehnung eines solchen „Elementargebietes“:

$$dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta = d\sigma$$

ist klein gegen die äußere Begrenzung des Gesamtgebietes, aber doch immerhin so groß zu denken, daß sich viele Moleküle darin befinden; denn sonst könnte der Zustand nicht elementar ungeordnet sein. Wir setzen daher die Anzahl der in dem Elementargebiet $d\sigma$ befindlichen Moleküle gleich:

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \cdot d\sigma. \tag{204}$$

f ist hier als eine endliche bekannte Funktion der Koordinaten und der Geschwindigkeitskomponenten anzusehen, deren analytischer Ausdruck das gesamte Verteilungsgesetz und damit den Zustand des Gases eindeutig darstellt. Denn auf die speziellere Anordnung der Moleküle innerhalb eines einzelnen Elementargebietes kommt es weiter nicht an. Wir wollen f als stetig und differentiierbar voraussetzen; im übrigen muß f nur die eine Bedingung erfüllen, daß sich durch Integration über alle Elementargebiete die Gesamtzahl der Gasmoleküle ergibt:

$$\int f \, d\sigma = N. \tag{205}$$

§ 140. Es handelt sich jetzt im wesentlichen um die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit W für die gegebene Raum- und Geschwindigkeitsverteilung, welche nach § 136 gleich ist der Anzahl von Komplexionen, die dieser Verteilung entsprechen. Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst, was bisher nicht wesentlich war, alle Elementargebiete $d\sigma$ als gleich groß an.

Nun kann man die gegebene Raum- und Geschwindigkeitsverteilung anschaulich illustrieren dadurch, daß man die verschiedenen gleich großen Elementargebiete numeriert, die Nummern nebeneinander schreibt, und unter jede Nummer die Anzahl der Moleküle setzt, welche in dem betreffenden Gebiet liegen. Hätten wir z. B. nur 10 Moleküle und nur 7 Elementargebiete, so würde eine bestimmte Verteilung durch folgendes Ziffernbild dargestellt:

1	2	3	4	5	6	7
1	2	0	0	1	4	2,

welches besagt, daß

1 Molekül im 1. Elementargebiet,
2 Moleküle „ 2. „
0 Molekül „ 3. „
0 „ „ 4. „
1 „ „ 5. „
4 Moleküle „ 6. „
2 „ „ 7. „ liegen.

Diese bestimmte Verteilung kann nun durch viele verschiedene individuelle Zuordnungen oder Komplexionen realisiert werden, je nachdem ein bestimmtes ins Auge gefaßtes Molekül in dieses oder in jenes Elementargebiet zu liegen kommt. Um sich eine einzelne derartige Komplexion zu versinnbildlichen, kann man die Moleküle mit Ziffern versehen, diese nebeneinander schreiben, und unter jede Molekülziffer die Nummer desjenigen Elementargebiets setzen, welchem das betreffende Molekül bei dieser Komplexion angehört. Für die oben angeführte Verteilung erhalten wir so als Ausdruck einer einzelnen dazugehörigen beliebig herausgegriffenen Komplexion das folgende Ziffernbild:

(206)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	1	7	5	6	2	2	6	6	7.

Hierdurch ist ausgedrückt, daß

das 2. Molekül . . . im 1. Elementargebiet,
„ 6. u. 7. Molekül . . „ 2. „
„ 4. Molekül . . . „ 5. „
„ 1., 5., 8. u. 9. Molekül „ 6. „
„ 3. u. 10. Molekül . „ 7. „ liegt.

Wie man durch einen Vergleich mit der vorigen Tabelle unmittelbar erkennt, entspricht diese Komplexion in der Tat in allen Stücken dem oben angegebenen Verteilungsgesetz, und ebenso lassen sich leicht viele andere Komplexionen angeben, welche zu dem nämlichen Verteilungsgesetz gehören. Die gesuchte Zahl aller möglichen Komplexionen ergibt sich nun durch die Betrachtung der unteren der beiden Ziffernreihen (206). Denn da die Anzahl der Moleküle gegeben ist, so enthält die

Ziffernreihe eine bestimmte Anzahl Stellen. Da ferner das Verteilungsgesetz gegeben ist, so kommt jede Ziffer (d. h. jedes Elementargebiet) stets gerade so oft in der Reihe vor, als die Anzahl der Moleküle beträgt, die in dem betreffenden Elementargebiet liegen. Im übrigen bedingt jede Veränderung des Ziffernbildes eine neue individuelle Zuordnung der Moleküle zu den Gebieten, also eine neue Komplexion. Die Anzahl der möglichen Komplexionen, oder die Wahrscheinlichkeit W des gegebenen Zustandes, ist also gleich der Anzahl der unter den genannten Bedingungen möglichen „Permutationen mit Wiederholung". In dem gewählten einfachen Zahlenbeispiel ergibt sich hierfür nach einer bekannten Formel der Ausdruck:

$$\frac{10!}{1!\,2!\,0!\,0!\,1!\,4!\,2!} = 37800.$$

Die Form dieses Ausdrucks ist so gewählt, daß sie leicht auf den hier vorliegenden Fall der Gasmoleküle verallgemeinert werden kann. Der Zähler enthält die Fakultät oder Faktorielle der Gesamtzahl N der betrachteten Moleküle, der Nenner das Produkt der Fakultäten der Molekülzahlen, welche in jedem einzelnen Elementargebiet liegen, und welche in unserem Falle durch den Ausdruck (204) gegeben sind.

Daher erhalten wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit der gegebenen Raum- und Geschwindigkeitsverteilung, und somit des gegebenen Gaszustandes:

$$W = \frac{N!}{\Pi (f\,d\sigma)!}.$$

Das Zeichen Π bedeutet das Produkt, erstreckt über alle Elementargebiete $d\sigma$.

§ 141. Daraus ergibt sich nach (203) für die Entropie des Gases in dem gegebenen Zustand:

$$S = k \log N! - k \sum \log (f\,d\sigma)! + \text{const.}$$

Die Summation $\sum$ ist über alle Elementargebiete $d\sigma$ zu erstrecken.

Da $f\,d\sigma$ eine große Zahl ist, so läßt sich für die Fakultät derselben die Stirlingsche Formel anwenden, welche für eine große Zahl n abgekürzt lautet:[1]

[1] Vgl. z. B. E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig, B. G. Teubner), p. 22, 1903.

(207) $$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Also, mit Fortlassung unwesentlicher Glieder:

$$\log n! = n(\log n - 1).$$

Daher wird, wenn man $f\,d\sigma$ statt n setzt:

$$S = k \log N! - k \sum f\,d\sigma\,[\log(f\,d\sigma) - 1] + \text{const}.$$

Das Summenzeichen $\sum$ ersetzen wir weiterhin durch das Integralzeichen. Ferner wollen wir alle additiven konstanten Glieder in die const aufgenommen denken. Dazu gehört zunächst das Glied mit $N!$, ferner der Faktor $d\sigma$ hinter dem Logarithmus, weil alle Elementargebiete gleich groß sind, und weil $\sum f\,d\sigma = N$ konstant ist, endlich das Glied mit -1. So bleibt für die Entropie des Gases der Ausdruck übrig:

(208) $$S = \text{const} - k \int f \log f\,d\sigma,$$

gültig für jede beliebige gegebene Raum- und Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle, also für jeden Zustand des Gases.

§ 142. Wir wollen nun speziell die Entropie des Gases in einem Gleichgewichtszustand bestimmen, und fragen daher zunächst nach derjenigen Form des Verteilungsgesetzes, welches dem thermodynamischen Gleichgewicht entspricht. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ist ein Gleichgewichtszustand durch die Bedingung ausgezeichnet, daß bei gegebenen Werten des Gesamtvolumens V und der Gesamtenergie U die Entropie S ihren Maximalwert annimmt. Setzen wir also das Gesamtvolumen der Gasmoleküle:

$$V = \iiint dx\,dy\,dz$$

und die Gesamtenergie derselben:

(209) $$U = \frac{m}{2} \int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) f\,d\sigma$$

als gegeben voraus (m Masse eines Moleküls), so muß für den Gleichgewichtszustand die Bedingung gelten:

$$\delta S = 0$$

oder nach (208):

(210) $$\int (\log f + 1)\,\delta f\,d\sigma = 0,$$

$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \delta w_i = 0 \\ \Sigma \log w_i \, \delta w_i = 0 \end{array} \right.$, necessary and sufficient for $\log w_i = \text{const}$

wobei die Variation δf sich auf eine beliebige mit den gegebenen Werten von N, V und U verträgliche Änderung des Verteilungsgesetzes bezieht.

Nun ist wegen der Unveränderlichkeit der Gesamtzahl N der Moleküle nach (205):

$E = N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + \cdots = N \bar{\varepsilon}$

$= \Sigma \varepsilon_i \, \delta w_i$

$$\int \delta f \, d\sigma = 0$$

und wegen der Unveränderlichkeit der Gesamtenergie U nach (209):

$$\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \, \delta f \, d\sigma = 0 .$$

Folglich ist zur Erfüllung der Bedingung (210) für alle zulässigen δf hinreichend und notwendig, daß

$$\log f + \beta (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \text{const}$$

oder:

$$f = \alpha \, e^{-\beta (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} , \tag{211}$$

wobei α und β konstant. Im Gleichgewichtszustand ist also die Raumverteilung der Moleküle gleichmäßig, d. h. unabhängig von x, y, z, und die Geschwindigkeitsverteilung ist die bekannte MAXWELLsche.

§ 143. Die Werte der Konstanten α und β ergeben sich aus denen von N, V und U. Denn die Substitution des gefundenen Ausdrucks von f in (205) ergibt:

$$N = V \alpha \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = V \alpha \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}}$$

und die Substitution von f in (209) ergibt:

$$U = V \cdot \frac{m}{2} \alpha \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \cdot e^{-\beta (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta ,$$

$$U = \frac{3}{4} V m \alpha \frac{1}{\beta} \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} .$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \frac{N}{V} \cdot \left(\frac{3 m N}{4 \pi U} \right)^{\frac{3}{2}} , \qquad \beta = \frac{3 m N}{4 U}$$

und daraus endlich nach (208) der Ausdruck der Entropie S des Gases im Gleichgewichtszustand bei gegebenen Werten von N, V und U:

$$S = \text{const} + k N \left(\tfrac{3}{2} \log U + \log V \right) . \tag{212}$$

$\log w_i + \ldots$

$w_i = \alpha e$

$\alpha = e^{-\beta \varepsilon_i}$

Hier enthält die additive Konstante Glieder mit N und mit m, nicht aber solche mit U oder mit V.

§ 144. Die hier durchgeführte Bestimmung der Entropie eines einatomigen Gases stützt sich lediglich auf den allgemeinen durch die Gleichung (203) ausgedrückten Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit; insbesondere haben wir bei unserer Berechnung an keiner Stelle von irgend einem speziellen Satz der Lehre von den Gasen Gebrauch gemacht. Daher ist es von Wichtigkeit, zu sehen, wie nun aus dem gefundenen Ausdruck der Entropie das gesamte thermodynamische Verhalten eines einatomigen Gases, namentlich die Zustandsgleichung und die Werte der spezifischen Wärme, direkt mittels der Hauptsätze der Thermodynamik erschlossen werden kann. Denn aus der allgemeinen thermodynamischen Definitionsgleichung der Entropie:

$$dS = \frac{dU + p\,dV}{T} \tag{213}$$

ergeben sich die partiellen Differentialquotienten von S nach U und nach V:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T}.$$

Folglich für unser Gas, mit Benutzung von (212):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{3}{2}\frac{kN}{U} = \frac{1}{T} \tag{214}$$

und

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{kN}{V} = \frac{p}{T}. \tag{215}$$

Die zweite dieser Gleichungen:

$$p = \frac{kNT}{V}$$

enthält die Gesetze von Boyle, Gay Lussac und Avogadro, das letztere deshalb, weil der Druck nur von der Anzahl N, nicht von der Beschaffenheit der Moleküle abhängt. Schreibt man sie in der gewöhnlichen Form:

$$p = \frac{RnT}{V},$$

wo n die Anzahl der Grammoleküle oder der Mole des Gases, bezogen auf $O_2 = 32\,g$, und R die absolute Gaskonstante bezeichnet:

$$R = 831 \cdot 10^5 \frac{\text{erg}}{\text{grad}}, \tag{216}$$

so ergibt sich durch Vergleichung:

$$k = \frac{Rn}{N}. \tag{217}$$

Nennen wir also ω das Verhältnis der Molzahl zur Molekülzahl, oder, was dasselbe ist, das Verhältnis der Molekülmasse zur Molmasse, $\omega = \frac{n}{N}$, so kommt:

$$k = \omega R. \tag{218}$$

Hieraus kann man, wenn ω gegeben ist, die universelle Konstante k berechnen, und umgekehrt.

Die Gleichung (214) lautet:

$$U = \tfrac{3}{2} k N T. \tag{219}$$

Da nun andererseits die Energie eines idealen Gases:

$$U = A n c_v T,$$

wo c_v die Wärmekapazität eines Mol bei konstantem Volumen in Kalorien, A das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet:

$$A = 419 \cdot 10^5 \frac{\text{erg}}{\text{cal}}, \tag{220}$$

so folgt:

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{kN}{An}$$

und mit Berücksichtigung von (217):

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{831 \cdot 10^5}{419 \cdot 10^5} = 3{,}0 \tag{221}$$

als Molwärme irgend eines einatomigen Gases bei konstantem Volumen in Kalorien.[1]

Für die Molwärme c_p bei konstantem Druck folgt aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik:

$$c_p - c_v = \frac{R}{A},$$

also mit Rücksicht auf (221):

$$c_p - c_v = \frac{2}{3} c_v, \qquad \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3},$$

wie für einatomige Gase bekannt.

[1] Vgl. F. Richarz, Wied. Ann. 67, p. 705, 1899.

Die mittlere Energie oder die mittlere lebendige Kraft L eines Moleküls ergibt sich aus (219) zu:

$$\frac{U}{N} = L = \frac{3}{2} k T. \tag{222}$$

Man sieht, daß sich alle diese Beziehungen lediglich aus der Identifizierung des mechanischen Ausdrucks (208) mit dem thermodynamischen Ausdruck (213) der Entropie ergeben.

Drittes Kapitel.
Berechnung der Strahlungsentropie und Folgerungen daraus. Energieverteilungsgesetz. Elementarquanta.

§ 145. Nachdem wir gesehen haben, wie man für ein ideales Gas den Ausdruck der Entropie direkt aus der Wahrscheinlichkeit des Zustandes berechnen kann, und wie sich daraus alle thermodynamischen Eigenschaften des Gases durch eine direkte Anwendung der Hauptsätze der Thermodynamik ableiten lassen, wollen wir jetzt denselben Gedankengang für die strahlende Wärme durchführen. Aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz erhielten wir in der Gleichung (119) einen Ausdruck für die räumliche Entropiedichte $\mathfrak{s}$ als Funktion der räumlichen Energiedichte u, ferner in der Gleichung (134) einen Ausdruck für die Entropie $\mathfrak{S}$ eines einzelnen Strahles als Funktion seiner spezifischen Intensität $\mathfrak{K}$, endlich in der Gleichung (200) einen Ausdruck für die Entropie S eines der Wärmestrahlung ausgesetzten Resonators als Funktion seiner Energie U. Jeder dieser drei Ausdrücke enthält eine bis jetzt noch unbekannt gebliebene universelle Funktion eines einzigen Arguments, und die Berechnung dieser Funktion ist es, worauf es im folgenden ankommt. Wenn diese Aufgabe für eine der drei genannten Ausdrücke gelöst ist, sind damit auch die beiden anderen Ausdrücke gefunden, vermöge der bekannten früher abgeleiteten Beziehungen zwischen den Größen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{S}$ und S untereinander, und der Größen u, $\mathfrak{K}$ und U untereinander. Wir können daher von vornherein an irgend eine jener drei Gleichungen anknüpfen. Am meisten empfiehlt es sich natürlich, die einfachste unter ihnen auszuwählen, und das ist, wie schon früher hervorgehoben, die Resonatorgleichung (200):

$$S = F\left(\frac{U}{\nu}\right), \tag{223}$$

wenn wir die Schwingungszahl der Eigenperiode des Resonators von jetzt an kurz mit ν ohne Index bezeichnen. Die Funktion F enthält außer ihrem Argument nur universelle Konstante.

§ 146. Bei der näheren Untersuchung der Entropie eines Resonators von gegebener Energie ist die erste Frage die nach der Art der elementaren Unordnung, auf welcher die Entropie beruht und ohne welche sie keine Bedeutung besitzt (§ 132). Die Antwort hierauf gibt ein Blick auf die Gleichungen (187) und (195). Hiernach sind die Schwingungen eines der stationären Wärmestrahlung ausgesetzten Resonators zusammengesetzt aus einer großen Reihe von Partialschwingungen, und seine Energie ist ein Mittelwert aus sehr vielen im einzelnen nicht kontrollierbaren Größen. Diese zahlreichen voneinander unabhängigen Partialschwingungen sind es also, die bei dem Resonator in bezug auf die elementare Unordnung dieselbe Rolle spielen, die bei einem Gase den zahlreichen durcheinanderfliegenden Molekülen zukommt. So wenig man bei einem Gase von einer endlichen Entropie sprechen kann, wenn alle Moleküle gleiche und gleichgerichtete, oder auch nur in irgend einer Weise geordnete Geschwindigkeiten besitzen, ebensowenig kommt einem Resonator eine endliche Entropie zu, wenn seine Schwingungen etwa einfach periodisch sind oder wenn sie überhaupt nach irgend einem bestimmten Gesetz erfolgen, das alles bis ins einzelne regelt. Denn dann ist der Schwingungsvorgang nicht mehr elementar ungeordnet. Daher besitzt z. B. ein Resonator, der von außen überhaupt nicht erregt wird, dessen Schwingungen also einfach mit konstanter Dämpfung nach Gleichung (169) abklingen, keine endliche Entropie und keine endliche Temperatur, obwohl er eine endliche Energie besitzen kann.

Ob nun die Resonatorschwingungen elementar ungeordnet sind oder nicht, kann man offenbar gar nicht beurteilen, wenn man den Zustand des Resonators nur zu einem bestimmten Zeitpunkt berücksichtigt. Denn dann bleibt es noch ganz unentschieden, ob der Zustand sich mit der Zeit regelmäßig oder regellos ändert. Damit stimmt auch ganz überein, daß wir die

Energie U eines der stationären Wärmestrahlung ausgesetzten Resonators nur als einen zeitlichen Mittelwert definieren können, wie in § 123 geschehen ist. Aus diesem Grund besitzt auch die Entropie S eines Resonators nicht für einen Zeitpunkt, sondern nur für ein Zeitintervall Bedeutung, das viele Resonatorschwingungen umfaßt, und wir können nur von einem zeitlichen Mittelwert der Entropie reden.[1] Kurz gesagt: bei den Wärmeschwingungen eines Resonators ist die Unordnung eine zeitliche, während sie bei den Molekularbewegungen eines Gases eine räumliche ist. Doch fällt dieser Unterschied für die Berechnung der Entropie des Resonators nicht so schwer ins Gewicht, als es vielleicht auf den ersten Anblick scheinen möchte; denn er läßt sich durch eine einfache Betrachtung beseitigen, was im Interesse einer gleichförmigen Behandlung von Vorteil ist.

Der zeitliche Mittelwert U der Energie eines einzelnen in einem stationär durchstrahlten Vakuum befindlichen Resonators ist nämlich offenbar identisch mit dem in einem bestimmten Zeitpunkt genommenen Mittelwert der Energien einer sehr großen Anzahl N von genau gleichbeschaffenen Resonatoren, die sich in dem nämlichen stationären Strahlungsfelde befinden, aber so weit voneinander entfernt, daß ihre Schwingungen sich nicht direkt merklich beeinflussen. Natürlich muß zu diesem Zweck das Feld von hinreichender räumlicher Ausdehnung genommen werden. Damit ist die Frage nach der Verteilung der Energie unter die einzelnen Partialschwingungen eines einzigen Resonators zurückgeführt auf die räumliche Verteilung der Energie auf die N Resonatoren, wie es dem bei den Gasmolekülen behandelten Fall besser entspricht.

§ 147. Um nun die Entropie dieses Systems von N in einem stationären Strahlungsfelde befindlichen gleichbeschaffenen Resonatoren in einem gegebenen Zustand zu berechnen, müssen wir nach den Ausführungen des § 135 zunächst nach denjenigen Größen fragen, welche den physikalischen Zustand des Systems bestimmen. Das ist hier einzig und allein die mittlere Energie U

[1] Bei der Anwendung auf nichtstationäre Felder muß das dem Mittelwert zugrunde gelegte Zeitintervall so klein genommen werden, daß das Feld als stationär betrachtet werden kann. Vgl. § 3.

eines einzelnen Resonators, bez. die Gesamtenergie U_N des ganzen Systems von Resonatoren, welche mit U durch die Gleichung:

$$N \cdot U = U_N \tag{224}$$

zusammenhängt. Denn da das Strahlungsfeld stationär ist, so ist durch die Energie der physikalische Zustand des ganzen Systems bestimmt.[1] In diesem Punkt liegt der wesentlichste Unterschied zwischen dem hier behandelten Fall und dem früheren eines Gases. Denn dort war der Zustand bedingt durch die Art der Raum- und Geschwindigkeitsverteilung unter den Molekülen, die von vornherein ganz beliebig angenommen werden konnte. Erst wenn das Verteilungsgesetz gegeben war, konnte der Zustand als bekannt angenommen werden. Hier dagegen genügt die Angabe der Gesamtenergie U_N der N Resonatoren für die Bestimmung des Zustandes; die speziellere Art der Verteilung der Energie U_N unter die einzelnen Resonatoren unterliegt nicht mehr der Kontrolle, sie ist ganz dem Zufall, der elementaren Unordnung, anheimgegeben. Denn die Bedingung, daß das Strahlungsfeld stationär ist, bedeutet hier nicht etwa einen speziellen Fall unter vielen anderen, sondern sie gehört hier mit zu den notwendigen Voraussetzungen; sonst könnte man den Quotienten $\frac{U_N}{N}$ nicht mehr, wie wir es getan haben, mit dem zeitlichen Mittelwert der Energie eines einzelnen Resonators identifizieren.

§ 148. Es handelt sich nun weiter um die Wahrscheinlichkeit W des durch die Energie U_N bestimmten Zustandes der N Resonatoren, d. h. um die Anzahl der individuellen Zuordnungen oder Komplexionen, welche der Verteilung der Energie U_N auf die N Resonatoren entsprechen (§ 136). Wir könnten hier ganz analog wie bei den Gasmolekülen verfahren, indem wir nur berücksichtigen, daß der gegebene Zustand des Resonatorensystems nicht, wie dort, eine einzige, sondern eine große Anzahl von verschiedenen Verteilungsgesetzen zuläßt, da die Anzahl der Resonatoren, welche eine bestimmte Größe der Energie besitzen (besser: welche in ein bestimmtes „Energiegebiet" hineinfallen), keine vorgeschriebene ist, sondern variieren

[1] Das „System" umfaßt natürlich nur die N Resonatoren selber; das Strahlungsfeld gehört nicht mit dazu.

kann. Betrachten wir nun alle mögliche Arten von Energieverteilungsgesetzen und berechnen für jedes derselben die ihm entsprechende Anzahl von Komplexionen, genau wie bei den Gasmolekülen, so erhalten wir durch Addition sämtlicher so erhaltener Komplexionszahlen die gesuchte Wahrscheinlichkeit W des gegebenen physikalischen Zustandes.

Schneller und bequemer als auf dem angegebenen Wege kommen wir folgendermaßen zu demselben Ziele. Wir teilen die gegebene Gesamtenergie U_N in eine große Anzahl P gleiche Teile von der Größe ε, deren jeden wir ein Energieelement nennen. Dann ist:

$$P = \frac{U_N}{\varepsilon}. \tag{225}$$

Diese P Energieelemente sind nun auf alle mögliche Weise unter die N Resonatoren zu verteilen, wobei es aber nicht darauf ankommt, welche Energieelemente, sondern nur wieviel Energieelemente auf einen bestimmten Resonator entfallen. Denken wir uns also die N Resonatoren numeriert und die Ziffern nebeneinander in eine Reihe geschrieben, und zwar jede Ziffer so oft, als die Zahl der Energieelemente beträgt, die auf den betreffenden Resonator entfallen, so erhalten wir durch eine solche Ziffernreihe das Bild einer bestimmten Komplexion, in welcher jedem individuellen Resonator eine bestimmte Energie zukommt. Die Anordnung der Ziffern in der Reihe ist für die Komplexion gleichgültig, da eine bloße Umstellung der Ziffern an der Energie eines bestimmten Resonators nichts ändert. Besitzt in der Komplexion ein Resonator gar keine Energie, so kommt seine Ziffer in der Reihe gar nicht vor. Die Gesamtzahl der Zifferstellen ist notwendig P, d. h. die Zahl der zu verteilenden Energieelemente. Somit ist die Anzahl aller möglichen verschiedenen Komplexionen gleich der Anzahl der möglichen „Kombinationen mit Wiederholung von N Elementen zur P. Klasse“:

$$W = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)!\,P!}$$

und dies ist zugleich die gesuchte Wahrscheinlichkeit des gegebenen Zustandes der N Resonatoren. Wenn beispielsweise $N = 3$, $P = 4$, so sind die Bilder aller möglichen Komplexionen:

1	1	1	1		1	1	3	3		2	2	2	2
1	1	1	2		1	2	2	2		2	2	2	3
1	1	1	3		1	2	2	3		2	2	3	3
1	1	2	2		1	2	3	3		2	3	3	3
1	1	2	3		1	3	3	3		3	3	3	3

Die Anzahl aller möglichen Komplexionen ist hier $W = 15$, wie es der Formel entspricht.

Für die Entropie S_N des Resonatorsystems erhalten wir daher nach Gleichung (203), da N und P große Zahlen sind, mit Weglassung der additiven Konstanten:

$$S_N = k \log \frac{(N+P)!}{N!\,P!}$$

und mit Benutzung der STIRLINGschen Formel (207):

$$S_N = k\{(N+P)\log(N+P) - N\log N - P\log P\}.$$

Ersetzt man nun nach (225) P durch U_N und nach (224) U_N durch U, so ergibt sich nach leichter Umformung für die Entropie der N gleichbeschaffenen Resonatoren:

$$S_N = k N\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\log\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon}\log\frac{U}{\varepsilon}\right\}$$

und für die Entropie eines einzelnen Resonators:

$$S = \frac{S_N}{N} = k\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\log\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon}\log\frac{U}{\varepsilon}\right\}.$$

Ein Vergleich dieses Ausdrucks mit (223) zeigt, daß das Energieelement ε proportional der Schwingungszahl ν der Eigenperiode des Resonators sein muß. Wir setzen daher:

$$\varepsilon = h\nu, \tag{226}$$

wobei h konstant, und erhalten dadurch:

$$S = k\left\{\left(1+\frac{U}{h\nu}\right)\log\left(1+\frac{U}{h\nu}\right) - \frac{U}{h\nu}\log\frac{U}{h\nu}\right\} \tag{227}$$

als Lösung des behandelten Problems.

§ 149. Auffallend an diesem Resultat ist zunächst das Auftreten einer neuen universellen Konstante h von der Dimension eines Produkts aus Energie und Zeit. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied gegenüber dem Ausdruck der Entropie eines Gases, wo die Größe eines Elementargebiets, die wir $d\sigma$ nannten,

aus dem Schlußresultat ganz verschwindet, da sie sich nur in der physikalisch bedeutungslosen additiven Konstanten geltend macht. Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, daß die Konstante h bei den elementaren Schwingungsvorgängen in einem Emissionszentrum eine gewisse Rolle spielt, zu deren Ergründung von elektrodynamischer Seite her unsere bisherige Theorie jedoch keine näheren Anhaltspunkte liefert.[1] Und doch wird die Thermodynamik der Strahlung erst dann zum vollständig befriedigenden Abschluß gelangt sein, wenn die Konstante h in ihrer vollen universellen Bedeutung erkannt ist. Ich möchte dieselbe als „elementares Wirkungsquantum" oder als „Wirkungselement" bezeichnen, weil sie von derselben Dimension ist wie diejenige Größe, welcher das Prinzip der kleinsten Wirkung seinen Namen verdankt.

§ 150. Es ist von Interesse sich besonders zu vergewissern, daß man zu dem nämlichen Ausdruck der Entropie wie oben gelangt, wenn man bei der Berechnung der Anzahl von Komplexionen, die einem gegebenen Zustand entsprechen, nicht von vornherein auf die Energie, die ja immerhin eine zusammengesetzte Größe ist, Bezug nimmt, sondern direkt auf den elektromagnetischen Zustand der einzelnen Resonatoren zurückgeht, was für die Berechnung nicht ganz so einfach, aber allgemeiner und daher rationeller ist. Es handelt sich hierbei im wesentlichen um die richtige Ausmessung der „Elementargebiete" des Zustandsbereichs, da deren Größe ja der Berechnung der Komplexionen zugrunde gelegt wird und somit in letzter Linie den Maßstab für die Vergleichung der Wahrscheinlichkeiten verschiedener Zustände liefert. Der elektromagnetische Zustand eines Resonators ist nach § 104 bestimmt durch die Werte von f und f'. Trägt man also in einer Koordinatenebene f als Abszisse, f' als Ordinate auf, so entspricht jeder Punkt der Ebene einem bestimmten Zustand des Resonators, und umgekehrt. Doch ist die Größe eines Flächenelements in dieser Ebene keineswegs im allgemeinen ein Maß der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Zustand des Resonators durch einen Punkt innerhalb des Flächenelements dargestellt wird. Dieser einfache Satz gilt vielmehr nur dann, wenn man als Ordinate statt f' den der

[1] Vgl. die Anmerkung in § 109.

Koordinate f entsprechenden „Impuls“ (oder das „Moment“ von f), nämlich die Größe:

$$\frac{\partial U}{\partial f} = g,$$

d. h. nach (142):

$$g = Lf \tag{228}$$

nimmt.[1] Wir denken uns also f und g als die Koordinaten eines Punktes der Zustandsebene, und fragen zunächst nach der Größe der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Energie des Resonators zwischen den Werten U und $U + \Delta U$ liegt. Diese Wahrscheinlichkeit wird gemessen durch die Größe desjenigen Flächenstücks in der Ebene der Zustandsvariabeln f und g, welches von den Kurven $U = \text{const}$ und $U + \Delta U = \text{const}$ begrenzt wird.

Nun ist die Energie des Resonators in dem Zustandspunkt (f, g) nach (142) und (228) gegeben durch:

$$U = \frac{1}{2} K f^2 + \frac{1}{2} \frac{g^2}{L},$$

folglich ist die Kurve $U = \text{const}$ eine Ellipse mit den Halbachsen:

$$\sqrt{\frac{2U}{K}} \quad \text{und} \quad \sqrt{2UL}.$$

Ihr Flächeninhalt beträgt mithin:

$$\pi \sqrt{\frac{2U}{K}} \cdot \sqrt{2UL} = 2\pi U \sqrt{\frac{L}{K}} = \frac{U}{\nu},$$

wenn man nach Gleichung (166) die Schwingungszahl ν der Eigenperiode des Resonators einführt. Ebenso ergibt sich der Flächeninhalt der Ellipse $U + \Delta U = \text{const}$ als:

$$\frac{U + \Delta U}{\nu}.$$

Die Differenz der beiden Flächenräume, das Maß der gesuchten Wahrscheinlichkeit, beträgt mithin $\frac{\Delta U}{\nu}$. Denken wir uns nun die ganze Zustandsebene durch eine große Anzahl derartiger Ellipsen so in einzelne Abschnitte geteilt, daß die von je zwei aufeinanderfolgenden Ellipsen begrenzten ringförmigen Flächenstücke einander gleich sind, d. h. so, daß

[1] Vgl. z. B. L. Boltzmann, Gastheorie II, p. 62 ff., 1898, oder J. W. Gibbs, Elementary Principles in Statistical Mechanics, Chapter I, 1902.

$$\frac{\triangle U}{\nu} = \text{const},$$

so erhalten wir dadurch diejenigen Abschnitte $\triangle U$ der Energie, welche gleichen Wahrscheinlichkeiten entsprechen und welche daher als die Energieelemente zu bezeichnen sind. Setzen wir die Größe eines Energieelements $\triangle U = \varepsilon$ und die const der letzten Gleichung gleich h, so kommen wir genau zu der früheren Gleichung (226) zurück, ohne daß wir das Wiensche Verschiebungsgesetz herangezogen haben. Zugleich zeigt sich uns hier das elementare Wirkungsquantum h in einer neuen Bedeutung, nämlich als die Größe eines Elementargebiets in der Zustandsebene eines Resonators, gültig für Resonatoren von ganz beliebiger Schwingungsperiode. Der Umstand, daß die Konstante h als eine bestimmte endliche Größe eingeführt wird, ist charakteristisch für die ganze hier entwickelte Theorie. Würde man h unendlich klein annehmen, so käme man zu einem Strahlungsgesetz, welches als ein spezieller Fall aus dem allgemeinen hervorgeht (das Rayleighsche Gesetz, vgl. § 154 und namentlich § 166).

§ 151. Die Gleichung (227) führt zunächst mit Rücksicht auf die Beziehungen (198) und (193) zu dem Ausdruck der Entropiestrahlung $\mathfrak{S}$ eines monochromatischen geradlinig polarisierten Strahles von der spezifischen Strahlungsintensität $\mathfrak{K}$ und der Schwingungszahl ν:

$$(229) \qquad \mathfrak{S} = \frac{k\nu^2}{c^2}\left\{\left(1+\frac{c^2\mathfrak{K}}{h\nu^3}\right)\log\left(1+\frac{c^2\mathfrak{K}}{h\nu^3}\right) - \frac{c^2\mathfrak{K}}{h\nu^3}\log\frac{c^2\mathfrak{K}}{h\nu^3}\right\}$$

als bestimmtere Fassung der Gleichung (134) des Wienschen Verschiebungsgesetzes.

Ferner folgt mit Rücksicht auf (197) und (194) die räumliche Entropiedichte $\mathfrak{s}$ einer gleichmäßigen monochromatischen unpolarisierten Strahlung in ihrer Abhängigkeit von der räumlichen Energiedichte u:

$$(230) \quad \mathfrak{s} = \frac{8\pi k\nu^2}{c^3}\left\{\left(1+\frac{c^3\mathrm{u}}{8\pi h\nu^3}\right)\log\left(1+\frac{c^3\mathrm{u}}{8\pi h\nu^3}\right) - \frac{c^3\mathrm{u}}{8\pi h\nu^3}\log\frac{c^3\mathrm{u}}{8\pi h\nu^3}\right\}$$

als bestimmtere Fassung der Gleichung (119).

§ 152. Nun wollen wir in jede der drei Gleichungen (227), (229), (230) die Temperatur T des Resonators bez. der monochromatischen Strahlung einführen und die Energiegrößen U, $\mathfrak{K}$

und u durch die Temperatur T ausdrücken. Wir benutzen dazu je eine der Gleichungen (199), (135) und (117), und erhalten dann:

Für die Energie des Resonators:

$$U = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{231}$$

Für die spezifische Intensität eines monochromatischen geradlinig polarisierten Strahles von der Schwingungszahl ν:

$$\mathfrak{K} = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{232}$$

Für die räumliche Energiedichte der gleichmäßigen monochromatischen unpolarisierten Strahlung von der Schwingungszahl ν:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{233}$$

Unter allen verschiedenartig zusammengesetzten Strahlungen ist die schwarze Strahlung dadurch ausgezeichnet, daß alle darin enthaltenen monochromatischen Strahlen die nämliche Temperatur besitzen (§ 93). Daher liefern diese Gleichungen auch das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum, d. h. im Emissionsspektrum eines in bezug auf das Vakuum schwarzen Körpers.

Bezieht man die spezifische Intensität eines monochromatischen Strahles nicht auf die Schwingungszahl ν, sondern, wie es in der Experimentalphysik gewöhnlich geschieht, auf die Wellenlänge λ, so erhält man, mit Benutzung von (15) und (16), den Ausdruck:

$$E_\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1} \tag{234}$$

als die Intensität eines monochromatischen geradlinig polarisierten Strahles von der Wellenlänge λ, der von einem auf der Temperatur T befindlichen schwarzen Körper senkrecht zur Oberfläche in das Vakuum emittiert wird. Die dazu gehörige räumliche Strahlungsdichte der unpolarisierten Strahlung ergibt sich durch Multiplikation von E_λ mit $\frac{8\pi}{c}$.

Zur Geschichte der Gleichung (234) vgl. weiter unten § 189. Ihre experimentelle Prüfung hat bisher eine gute Übereinstimmung mit der Erfahrung ergeben.[1] Doch sind nach O. Lummer und E. Pringsheim[2] die bisherigen Messungen noch nicht ausreichend, um vom rein experimentellen Standpunkt aus die Allgemeingültigkeit jener Formel als gesichert hinstellen zu können.

§ 153. Für kleine Werte von λT (d. h. klein gegen die Konstante $\frac{ch}{k}$) geht (234) über in die Gleichung:

$$E_\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{ch}{k\lambda T}}, \tag{235}$$

welche das „Wiensche Energieverteilungsgesetz" ausspricht.[3]

Die spezifische Strahlungsintensität $\mathfrak{R}$ wird dann nach (232):

$$\mathfrak{R} = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}} \tag{236}$$

und die räumliche Energiedichte u nach (233):

$$\mathfrak{u} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{237}$$

Für die Energie eines Resonators von der Schwingungszahl ν erhält man dann aus (231):

$$U = h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{238}$$

Die Entropie S des Resonators als Funktion der Energie U wird dann nach (227), da der Quotient $\frac{U}{h\nu}$ kleine Werte annimmt:

$$S = -\frac{kU}{h\nu} \log \frac{U}{eh\nu}. \tag{239}$$

Diese Beziehungen gelten also für jede Wellenlänge bei hinreichend tiefen Temperaturen, und für jede Temperatur bei hinreichend kurzen Wellen.

---

[1] Vgl. namentlich H. Rubens und F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, vom 25. Okt. 1900, p. 929. Drudes Ann. **4**, p. 649, 1901; und F. Paschen, Drudes Ann. **4**, p. 277, 1901.

[2] O. Lummer und E. Pringsheim, Drudes Ann. **6**, p. 210, 1901.

[3] W. Wien, Wied. Ann. **58**, p. 662, 1896.

§ 154. Für große Werte von λT hingegen wird aus (234):

$$E_\lambda = \frac{c k T}{\lambda^4}, \tag{240}$$

eine Beziehung, die zuerst von Lord RAYLEIGH[1] aufgestellt worden ist, und die wir daher als „RAYLEIGHsches Strahlungsgesetz" bezeichnen können.

Für die spezifische Strahlungsintensität $\mathfrak{R}$ ergibt sich dann aus (232):

$$\mathfrak{R} = \frac{k \nu^2 T}{c^2} \tag{241}$$

und für die räumliche Energiedichte u der monochromatischen Strahlung aus (233):

$$u = \frac{8 \pi k \nu^2 T}{c^3}. \tag{242}$$

Die Energie eines Resonators wird dann nach (231):

$$U = k T, \tag{243}$$

also einfach proportional der absoluten Temperatur und ganz unabhängig von der Schwingungszahl ν der Eigenperiode, wie überhaupt von der natürlichen Beschaffenheit des Resonators.

Für die Entropie S des Resonators als Funktion seiner Energie U endlich ergibt sich unter derselben Voraussetzung, da $\frac{U}{h\nu}$ dann große Werte annimmt:

$$S = k \log U + \text{ const}. \tag{244}$$

Es ist von Interesse, den einfachen für lange Wellen oder hohe Temperaturen gültigen Wert (243) der Schwingungsenergie eines Resonators zu vergleichen mit der früher in (222) berechneten mittleren lebendigen Kraft L der Bewegung eines einatomigen Moleküls bei der nämlichen Temperatur. Der Vergleich ergibt:

$$U = \tfrac{2}{3} L. \tag{245}$$

Diese Beziehung, und damit auch die Identität der Konstanten k für die Molekularbewegungen und für die Strahlungsvorgänge, wird von einer ganz anderen Seite her in sehr bemerkenswerter Weise bestätigt durch eine Folgerung aus der Elektronentheorie. Nach den Anschauungen dieser Theorie hat man sich nämlich

[1] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. **49**, p. 539, 1900.

die von uns betrachteten linearen Schwingungen eines elementaren Oszillators vorzustellen als geradlinige Bewegungen eines Elektrons. Dann muß nach einem Satz der statistischen Mechanik in einem von Wärmestrahlung erfüllten Gase beim thermodynamischen Gleichgewichtszustand die mittlere lebendige Kraft dieser geradlinigen Elektronenbewegung gleich sein dem dritten Teil der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Moleküls; denn die letztere Bewegung wird durch drei voneinander unabhängige Komponenten bestimmt, besitzt also drei Grade von Bewegungsfreiheit, während dagegen den Elektronenschwingungen in unserem Oszillator nur ein einziger Grad von Bewegungsfreiheit zukommt. Nun ist einerseits die mittlere lebendige Kraft der Elektronenschwingungen gleich der Hälfte der ganzen Schwingungsenergie, also $\frac{1}{2}U$, andererseits ist der dritte Teil der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Moleküls gleich $\frac{1}{3}L$, also folgt daraus die Beziehung (245). Sind verschiedenartige Resonatoren mit verschiedenen Eigenschwingungen im Gase vorhanden, so müssen sie alle die nämliche mittlere Schwingungsenergie besitzen, ebenso wie die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung verschiedener Molekülarten die gleiche ist. In der Tat ist nach (243) U von ν unabhängig.[1]

§ 155. Für die räumliche Gesamtdichte u der schwarzen Strahlung bei irgend einer Temperatur T ergibt sich aus (233):

$$u = \int_0^\infty \mathfrak{u}\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3\, d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

oder: $$u = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{h\nu}{kT}} + e^{-\frac{2h\nu}{kT}} + e^{-\frac{3h\nu}{kT}} + \ldots \right) \nu^3\, d\nu$$

[1] Vgl. hierzu A. Einstein, Drudes Ann. **17**, p. 132, 1905. Die dort hervorgehobene der Strahlungstheorie entgegenstehende Schwierigkeit rührt daher, daß die Beziehung (245) dort von vornherein als allgemeingültig vorausgesetzt wird, während nach der hier dargestellten Theorie der erwähnte Satz der statistischen Mechanik nur für hinreichend große Werte des Produkts λT Gültigkeit beanspruchen kann. Näheres über diesen prinzipiell wichtigen Punkt s. § 166.

und durch gliedweise Integration:

$$u = \frac{48\,\pi\,h}{c^3}\left(\frac{k\,T}{h}\right)^4 \alpha\,, \tag{246}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = 1{,}0823\,. \tag{247}$$

Hierdurch ist das STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz (75) ausgedrückt, mit der näheren Maßgabe, daß die Konstante dieses Gesetzes:

$$a = \frac{48\,\pi\,\alpha\,k^4}{c^3\,h^3}\,. \tag{248}$$

§ 156. Für diejenige Wellenlänge λ_m, welcher im Spektrum der schwarzen Strahlung das Maximum der Strahlungsintensität E_λ entspricht, ergibt sich aus der Gleichung (234):

$$\left(\frac{d\,E_\lambda}{d\,\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_m} = 0\,.$$

Die Ausführung der Differentiation liefert, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{c\,h}{k\,\lambda_m\,T} = \beta\,,$$

$$e^{-\beta} + \frac{\beta}{5} - 1 = 0\,.$$

Die Wurzel dieser transzendenten Gleichung ist:

$$\beta = 4{,}9651\,, \tag{249}$$

mithin ist $\lambda_m\,T = \frac{c\,h}{\beta\,k}$, also konstant, wie es das WIENsche Verschiebungsgesetz verlangt. Durch Vergleichung mit (109) erhält man die Bedeutung der Konstanten b:

$$b = \frac{c\,h}{\beta\,k}\,. \tag{250}$$

§ 157. Zahlenwerte. Mit Hilfe der gemessenen Werte von a und b lassen sich die universellen Konstanten h und k leicht berechnen. Es folgt nämlich aus den Gleichungen (248) und (250):

$$h = \frac{a\,\beta^4\,b^4}{48\,\pi\,\alpha\,c}\,, \qquad k = \frac{a\,\beta^3\,b^3}{48\,\pi\,\alpha}\,, \tag{251}$$

Dies ergibt mit den angegebenen Werten der Konstanten a, b, α, β, c, in (79), (110), (247), (249) und (51):

$$h = 6{,}548 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{erg \cdot sec}, \qquad k = 1{,}346 \cdot 10^{-16}\,\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{grad}}. \tag{252}$$

§ 158. Zur Enthüllung der vollen physikalischen Bedeutung des elementaren Wirkungsquantums h wird es noch mannigfacher Forschungsarbeit bedürfen. Dagegen gestattet der gefundene Wert von k leicht, den allgemeinen Zusammenhang zwischen Entropie S und Wahrscheinlichkeit W, wie er durch die universelle Gleichung (203) ausgedrückt ist, nunmehr auch numerisch im C.G.S.-System anzugeben. Es ist nämlich danach ganz allgemein die Entropie eines physikalischen Systems:

$$S = 1{,}346 \cdot 10^{-16} \cdot \log W \,\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{grad}} \tag{253}$$

zuzüglich einer willkürlichen additiven Konstanten. Diese Gleichung kann als die allgemeinste bisher existierende Definition der Entropie angesehen werden.

In der Anwendung auf die kinetische Gastheorie erhalten wir aus Gleichung (218) für das Verhältnis der Molekülmasse zur Molmasse:

$$\omega = \frac{k}{R} = \frac{1{,}346 \cdot 10^{-16}}{831 \cdot 10^{5}} = 1{,}62 \cdot 10^{-24}, \tag{254}$$

d. h. auf ein Mol gehen

$$\frac{1}{\omega} = 6{,}175 \cdot 10^{23}$$

Moleküle, wobei immer das Sauerstoffmol $O_2 = 32\,g$ vorausgesetzt ist. Daher ist z. B. die absolute Masse eines Wasserstoffatoms ($\frac{1}{2}H_2 = 1{,}008\,g$) gleich $1{,}63 \cdot 10^{-24}\,g$. Damit wird die Anzahl der bei 0° C. und Atmosphärendruck in 1 ccm enthaltenen Moleküle eines idealen Gases:

$$\mathfrak{N} = \frac{76 \cdot 13{,}6 \cdot 981}{831 \cdot 10^{5} \cdot 273 \cdot \omega} = 2{,}76 \cdot 10^{19}. \tag{255}$$

Die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Moleküls bei der absoluten Temperatur $T = 1$ ist nach (222) im absoluten C.G.S.-System:

$$\tfrac{3}{2}k = 2{,}02 \cdot 10^{-16}. \tag{256}$$

Allgemein wird die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden

Bewegung eines Moleküls durch das Produkt dieser Zahl und der absoluten Temperatur T ausgedrückt.

Das Elementarquantum der Elektrizität, oder die freie elektrische Ladung eines einwertigen Ions oder Elektrons ist im elektrostatischen Maße:

$$\varepsilon = \omega \cdot 9658 \cdot 3 \cdot 10^{10} = 4{,}69 \cdot 10^{-10}. \qquad (257)$$

Da die hier benutzten Formeln mit absoluter Genauigkeit gelten so dürfen diese Zahlen so lange als die exaktesten Bestimmungen der genannten physikalischen Größen angesehen werden, bis die zur Berechnung der universellen Konstante k benutzten Werte der Strahlungskonstanten a und b durch neuere Messungen verbessert werden.

§ 159. Natürliche Maßeinheiten. Alle bisher in Gebrauch genommenen physikalischen Maßsysteme, auch das sogenannte absolute C.G.S.-System, verdanken ihren Ursprung insofern dem Zusammentreffen zufälliger Umstände, als die Wahl der jedem System zugrunde liegenden Einheiten nicht nach allgemeinen, notwendig für alle Orte und Zeiten bedeutungsvollen Gesichtspunkten, sondern wesentlich mit Rücksicht auf die speziellen Bedürfnisse unserer irdischen Kultur getroffen ist. So sind die Einheiten der Länge und der Zeit aus den gegenwärtigen Dimensionen und der gegenwärtigen Bewegung unseres Planeten hergeleitet worden, ferner die Einheit der Maße und der Temperatur aus der Dichte und den Fundamentalpunkten des Wassers, als derjenigen Flüssigkeit, die an der Erdoberfläche die wichtigste Rolle spielt, genommen bei einem Druck, der der mittleren Beschaffenheit der uns umgebenden Atmosphäre entspricht. An dieser Willkür würde prinzipiell auch nichts Wesentliches geändert werden, wenn etwa zur Längeneinheit die unveränderliche Wellenlänge des Na-Lichtes genommen würde. Denn die Auswahl gerade des Na unter den vielen chemischen Elementen könnte wiederum nur etwa durch sein häufiges Vorkommen auf der Erde oder etwa durch seine für unser Auge glänzende Doppellinie, die keineswegs einzig in ihrer Art dasteht, gerechtfertigt werden. Es wäre daher sehr wohl denkbar, daß zu einer anderen Zeit, unter veränderten äußeren Bedingungen, jedes der bisher in Gebrauch genommenen Maßsysteme seine ursprüngliche natürliche Bedeutung teilweise oder gänzlich verlieren würde.

Dem gegenüber dürfte es nicht ohne Interesse sein, zu bemerken, daß mit Zuhilfenahme der beiden in dem Ausdrucke (227) der Strahlungsentropie auftretenden Konstanten h und k die Möglichkeit gegeben ist, Einheiten für Länge, Masse, Zeit und Temperatur aufzustellen, welche, unabhängig von speziellen Körpern oder Substanzen, ihre Bedeutung für alle Zeiten und für alle, auch außerirdische und außermenschliche Kulturen notwendig behalten und welche daher als „natürliche Maßeinheiten" bezeichnet werden können.

Die Mittel zur Festsetzung der vier Einheiten für Länge, Masse, Zeit und Temperatur werden gegeben durch die beiden erwähnten Konstanten h und k, ferner durch die Größe der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit c im Vakuum und durch die der Gravitationskonstante f. Bezogen auf Zentimenter, Gramm, Sekunde und Celsiusgrad sind die Zahlenwerte dieser vier Konstanten die folgenden:

$$h = 6{,}548 \cdot 10^{-27} \frac{\text{g cm}^2}{\text{sec}},$$

$$k = 1{,}346 \cdot 10^{-16} \frac{\text{g cm}^2}{\text{sec}^2 \text{grad}},$$

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

$$f = 6{,}685 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g sec}^2}.$$ [1]

Wählt man nun die „natürlichen Einheiten" so, daß im neuen Maßsystem jede der vorstehenden vier Konstanten den Wert 1 annimmt, so erhält man als Einheit der Länge die Größe:

$$\sqrt{\frac{fh}{c^3}} = 4{,}03 \cdot 10^{-33}\,\text{cm},$$

als Einheit der Masse:

$$\sqrt{\frac{ch}{f}} = 5{,}42 \cdot 10^{-5}\,\text{g},$$

als Einheit der Zeit:

$$\sqrt{\frac{fh}{c^5}} = 1{,}34 \cdot 10^{-43}\,\text{sec},$$

als Einheit der Temperatur:

[1] F. Richarz und O. Krigar-Menzel, Wied. Ann. **66**, p. 190, 1898.

$$\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\sigma^5 h}{f}} = 3{,}63 \cdot 10^{32}\,\text{grad Cels}.$$

Diese Größen behalten ihre natürliche Bedeutung so lange bei, als die Gesetze der Gravitation, der Lichtfortpflanzung im Vakuum und die beiden Hauptsätze der Thermodynamik in Gültigkeit bleiben, sie müssen also, von den verschiedensten Intelligenzen nach den verschiedensten Methoden gemessen, sich immer wieder als die nämlichen ergeben.

§ 160. Man bezeichnet häufig das Normalspektrum der Licht- und Wärmestrahlung als zusammengesetzt aus einer großen Anzahl von regelmäßigen periodischen Schwingungen. Diese Ausdrucksweise ist insofern vollkommen berechtigt, als sie an die Zerlegung der Gesamtschwingung in eine Fourier'sche Reihe, nach Gleichung (179), anknüpft, und eignet sich häufig in hervorragendem Maße dazu, die Betrachtungen bequem und übersichtlich zu gestalten; sie darf aber nicht zu der Auffassung verleiten, als ob jene „Regelmäßigkeit" auf einer besonderen physikalischen Eigenschaft der elementaren Schwingungsvorgänge im Spektrum beruhe; denn die Zerlegbarkeit in eine Fourier'sche Reihe ist mathematisch selbstverständlich und lehrt daher in physikalischer Beziehung nichts Neues. Man könnte im Gegenteil mit vollem Rechte behaupten, daß es in der ganzen Natur keinen unregelmäßigeren Vorgang gibt als die Schwingungen in den Strahlen eines Normalspektrums. Insbesondere hängen diese Schwingungen in keiner irgendwie charakteristischen Weise zusammen mit den speziellen Vorgängen in den Emissionszentren der Strahlen, etwa mit der Periode oder mit der Dämpfung der emittierenden Oszillatoren; denn gerade das Normalspektrum ist ja dadurch vor allen anderen Spektren ausgezeichnet, daß alle von der speziellen Natur der emittierenden Substanz herrührenden individuellen Verschiedenheiten vollkommen ausgeglichen und verwischt sind. Es wäre daher auch ein gänzlich aussichtsloses Unternehmen, wenn man etwa versuchen wollte, aus den Elementarschwingungen in den Strahlen des Normalspektrums Schlüsse zu ziehen auf die speziellen Eigenschaften der die Strahlen emittierenden Oszillatoren.

Die schwarze Strahlung läßt sich in der Tat ebensowohl wie aus regelmäßig periodischen Schwingungen, so auch aus gänzlich unregelmäßigen Einzelimpulsen zusammengesetzt an-

sehen. Die besonderen Regelmäßigkeiten, die wir an spektral zerlegtem monochromatischen Licht beobachten, rühren lediglich her von den besonderen Eigenschaften der benutzten Spektralapparate: des dispergierenden Prismas (Eigenperioden der Moleküle), des Beugungsgitters (Spaltbreite). Daher ist es unzutreffend, einen Unterschied zwischen Lichtstrahlen und Röntgenstrahlen, letztere als elektromagnetischen Vorgang im Vakuum angenommen, in dem Umstand zu erblicken, daß in ersteren die elementaren Schwingungen mit größerer Regelmäßigkeit erfolgen. Die Zerlegbarkeit in eine Fourier'sche Reihe von Partialschwingungen mit konstanten Amplituden und Phasen gilt für beide Arten von Strahlen in ganz gleicher Weise. Was aber die Lichtschwingungen vor den Röntgenschwingungen auszeichnet, ist wesentlich die viel kleinere Schwingungszahl ihrer Partialschwingungen, welche die Möglichkeit ihrer spektralen Zerlegung bedingt, und außerdem wahrscheinlich auch die viel größere zeitliche Gleichmäßigkeit der Strahlungsintensität in jedem Gebiete des Spektrums, die aber keineswegs auf einer besonderen Eigenschaft der elementaren Schwingungsvorgänge, sondern lediglich auf der Konstanz der Mittelwerte beruht.

§ 161. Die im § 152 ausgedrückten Beziehungen zwischen Strahlungsintensität und Temperatur gelten für die Strahlung im reinen Vakuum. Befindet sich die Strahlung in einem Medium vom Brechungsexponenten n, so wird die Abhängigkeit der Strahlungsintensität von der Schwingungszahl und der Temperatur durch den Satz des § 39 geregelt, daß das Produkt der spezifischen Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ und des Quadrats der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlung für alle Substanzen den nämlichen Wert hat. Die Form dieser universellen Funktion (42) ergibt sich ohne weiteres aus (232) zu:

$$\mathfrak{K} q^2 = \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} q^2 = \frac{h \nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{258}$$

Da nun der Brechungsexponent n der Fortpflanzungsgeschwindigkeit umgekehrt proportional ist, so tritt für ein Medium mit dem Brechungsexponent n an die Stelle von (232) die allgemeinere Beziehung:

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{h\nu^3 n^2}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{259}$$

und ebenso an die Stelle von (233) die allgemeinere Beziehung:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3 n^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \cdot \tag{260}$$

Diese Ausdrücke gelten natürlich zugleich für die Emission eines in bezug auf das Medium mit dem Brechungsexponenten n schwarzen Körpers.

§ 162. Wir wollen die gefundenen Strahlungsgesetze nun dazu benutzen, um die Temperatur einer monochromatischen unpolarisierten Strahlung von gegebener Intensität zu berechnen, welche von einer kleinen Fläche (Spalt) in senkrechter Richtung emittiert und durch ein beliebiges System diathermaner, durch zentrierte brechende (oder spiegelnde) Kugelflächen voneinander getrennter Medien nahe der Achse hindurchgegangen ist. Eine solche Strahlung besteht aus homozentrischen Bündeln und entwirft daher hinter jeder brechenden Fläche ein reelles oder virtuelles Bild der emittierenden Fläche, wiederum senkrecht zur Achse. Das letzte Medium nehmen wir zunächst, wie das erste, als reines Vakuum an. Dann handelt es sich für die Bestimmung der Strahlungstemperatur nach Gleichung (232) nur um die Berechnung der spezifischen Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ im letzten Medium, und diese ist gegeben durch die Gesamtintensität der monochromatischen Strahlung I_ν, die Größe der Bildfläche F, und den räumlichen Öffnungswinkel Ω des durch einen Punkt des Bildes hindurchgehenden Strahlenkegels. Denn die spezifische Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ ist nach (13) dadurch bestimmt, daß durch ein Flächenelement $d\sigma$ in senkrechter Richtung innerhalb des Elementarkegels $d\Omega$ in der Zeit dt die dem Schwingungsintervall von ν bis $\nu + d\nu$ entsprechende Energiemenge:

$$2\,\mathfrak{K}_\nu\, d\sigma\, d\Omega\, d\nu\, dt$$

unpolarisierten Lichtes hindurchgestrahlt wird. Bedeutet nun $d\sigma$ ein Element der Bildfläche im letzten Medium, so besitzt hiernach die gesamte betrachtete auf das Bild fallende monochromatische Strahlung die Intensität:

$$I_\nu = 2\,\mathfrak{K}_\nu \int d\sigma \int d\Omega .$$

I_ν ist von der Dimension einer Energiemenge, da das Produkt $d\nu \cdot dt$ eine reine Zahl ist. Das erste Integral ist die ganze Fläche F des Bildes, das zweite ist der räumliche Öffnungswinkel Ω des durch einen Punkt der Bildfläche hindurchgehenden Strahlenkegels. Daher erhält man:

(261) $$I_\nu = 2\,\mathfrak{K}_\nu F \Omega ,$$

und daraus mit Benutzung von (232) als Temperatur der Strahlung:

(262) $$T = \frac{h\nu}{k} \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{2\,h\,\nu^3\,F\,\Omega}{c^2\,I_\nu} + 1\right)} .$$

Wenn das betrachtete diathermane Medium nicht das Vakuum ist, sondern den Brechungsexponenten n besitzt, so tritt an die Stelle von (232) die allgemeinere Beziehung (259), und man erhält statt der letzten Gleichung:

(263) $$T = \frac{h\nu}{k} \cdot \frac{1}{\log\left(\frac{2\,h\,\nu^3\,F\,\Omega\,n^2}{c^2\,I_\nu} + 1\right)}$$

oder, mit Substitution der Zahlenwerte von c, h und k:

$$T = \frac{0{,}487 \cdot 10^{-10} \cdot \nu}{\log\left(\frac{1{,}46 \cdot 10^{-47}\,\nu^3\,F\,\Omega\,n^2}{I_\nu} + 1\right)} \text{ grad Cels.}$$

Hierbei ist der natürliche Logarithmus zu nehmen, und I_ν ist in erg, ν in reziproken Sekunden, F in Quadratzentimetern auszudrücken. Bei sichtbaren Strahlen wird man den Summanden 1 im Nenner meistens weglassen können.

Die so berechnete Temperatur bleibt der betrachteten Strahlung so lange erhalten, als sie sich in dem diathermanen Medium ungestört fortpflanzt, auch wenn sie sich bis in beliebige Entfernungen und in beliebig große Räume ausbreitet. Denn wenn auch in größeren Entfernungen eine immer kleinere Energiemenge durch ein Flächenelement von bestimmter Größe hindurchstrahlt, so verteilt sich dieselbe dafür auf einen um so schmaleren, von dem Elemente ausgehenden Strahlenkegel, so daß der Wert von $\mathfrak{K}$ ganz ungeändert bleibt. Daher ist die freie

Ausbreitung der Strahlung ein vollkommen reversibler Vorgang. Die Umkehrung desselben läßt sich etwa mit Hilfe eines passenden Hohlspiegels oder einer Sammellinse realisieren.

Fragen wir nun weiter nach der Temperatur der Strahlung in den übrigen Medien, die zwischen den einzelnen brechenden oder spiegelnden Kugelflächen liegen. In jedem dieser Medien besitzt die Strahlung eine bestimmte Temperatur, die durch die letzte Formel gegeben ist, wenn man sie auf das von der Strahlung in diesem Medium erzeugte reelle oder virtuelle Bild bezieht.

Die Schwingungszahl ν der monochromatischen Strahlung ist selbstverständlich in allen Medien dieselbe; ferner ist nach den Gesetzen der geometrischen Optik das Produkt $n^2 F \Omega$ in allen Medien gleich. Wenn daher auch noch die Gesamtintensität der Strahlung I, bei der Brechung (oder Reflexion) an einer Fläche konstant bleibt, so bleibt auch T konstant, oder mit anderen Worten: Die Temperatur eines homozentrischen Strahlenbündels wird durch regelmäßige Brechung oder Reflexion nicht geändert, falls dabei kein Energieverlust der Strahlung eintritt. Jede Schwächung der Gesamtintensität I, aber, durch Spaltung der Strahlung, sei es in zwei oder in viele verschiedene Richtungen, wie bei der diffusen Reflexion, führt zu einer Erniedrigung der Temperatur T des Strahlenbündels. Tatsächlich findet ja im allgemeinen bei jeder Brechung oder Reflexion ein bestimmter Energieverlust durch Reflexion oder Brechung, und mithin auch eine Temperaturerniedrigung statt. Hier kommt also der prinzipielle Unterschied scharf zur Geltung, den es macht, ob eine Strahlung lediglich durch freie Ausbreitung, oder ob sie durch Spaltung bez. Absorption geschwächt wird. Im ersten Fall bleibt die Temperatur konstant, im zweiten wird sie erniedrigt.[1]

§ 163. Nachdem die Gesetze der Emission eines schwarzen Körpers festgestellt sind, läßt sich mit Hilfe des KIRCHHOFFschen Gesetzes (48) das Emissionsvermögen E eines beliebigen Körpers berechnen, wenn sein Absorptionsvermögen A, bez. sein

[1] Deshalb ist aber doch die reguläre Brechung und Reflexion kein irreversibler Vorgang. Denn die Entropie zweier kohärenter Strahlen ist nicht gleich der Summe der Entropien der Einzelstrahlen, weil dieselben nicht unabhängig voneinander sind im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vgl. § 158 und § 134, sowie einen demnächst in DRUDES Annalen erscheinenden Aufsatz von M. LAUE (Anm. bei der Korrektur).

Reflexionsvermögen $1 - A$ bekannt ist. Bei Metallen gestaltet sich diese Berechnung besonders einfach für lange Wellen, nachdem E. Hagen und H. Rubens[1] experimentell gezeigt haben, daß das Reflexionsvermögen und überhaupt das ganze optische Verhalten der Metalle in dem genannten Spektralgebiete durch die einfachen Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für homogene Leiter dargestellt wird und somit nur von der spezifischen Leitungsfähigkeit für stationäre galvanische Ströme abhängt. Daher läßt sich das Emissionsvermögen eines Metalls für lange Wellen vollständig ausdrücken durch seine galvanische Leitungsfähigkeit in Verbindung mit den Formeln für die schwarze Strahlung.[2]

§ 164. Es gibt aber auch einen Weg zur direkten theoretischen Bestimmung sowohl der galvanischen Leitungsfähigkeit und damit des Absorptionsvermögens A als auch des Emissionsvermögens E von Metallen gerade für lange Wellen, wenn man von den Anschauungen der Elektronentheorie ausgeht, wie sie von E. Riecke[3] und namentlich von P. Drude[4] für die thermischen und elektrischen Vorgänge in den Metallen ausgebildet worden sind. Hiernach beruhen alle diese Vorgänge auf den schnellen unregelmäßigen Bewegungen der Elektronen, die zwischen den entgegengesetzt elektrisch geladenen ponderablen Metallmolekülen hin und her fliegen und von ihnen, wie auch untereinander, beim Zusammenstoß abprallen, ähnlich wie Gasmoleküle, wenn sie ein festes Hindernis oder sich gegenseitig treffen. Die Geschwindigkeit der Wärmebewegungen der ponderablen Moleküle ist nämlich gegen die der Elektronen zu vernachlässigen, weil im stationären Zustand die mittlere lebendige Kraft der Bewegung eines ponderablen Moleküles gleich derjenigen eines Elektrons ist (vgl. oben § 154), und weil die träge Masse eines ponderablen Moleküles die eines Elektrons um mehr als das Tausendfache übertrifft. Besteht nun im Innern des Metalls ein elektrisches Feld, so werden die entgegengesetzt geladenen Partikel nach entgegengesetzten Seiten getrieben, mit durchschnittlichen Geschwindigkeiten, die wesentlich mit von der mittleren freien

[1] E. Hagen und H. Rubens, Drudes Ann. **11**, p. 873, 1903.
[2] E. Aschkinass, Drudes Ann. **17**, p. 960, 1905.
[3] E. Riecke, Wied. Ann. **66**, p. 353, 1898.
[4] P. Drude, Drudes Ann. **1**, p. 566, 1900.

Weglänge abhängen, und hieraus resultiert die Leitungsfähigkeit des Metalls für den galvanischen Strom. Andererseits ergibt sich das Emissionsvermögen des Metalls für strahlende Wärme aus der Berechnung der Stöße der Elektronen. Denn solange ein Elektron mit konstanter Geschwindigkeit in konstanter Richtung fliegt, bleibt seine kinetische Energie konstant und es findet keine Ausstrahlung von Energie statt; sobald es aber durch einen Stoß eine Änderung seiner Geschwindigkeitskomponenten erleidet, wird ein gewisser aus der Elektrodynamik zu berechnender Betrag von Energie, der sich stets in der Form einer FOURIERschen Reihe darstellen läßt, in den umgebenden Raum ausgestrahlt, ganz ebenso, wie man sich die Röntgenstrahlung entstanden denkt durch den Anprall der von der Kathode fortgeschleuderten Elektronen gegen die Antikathode. Durchführen läßt sich diese Berechnung bis jetzt allerdings nur unter der Voraussetzung, daß während der Zeit einer Partialschwingung der FOURIERschen Reihe eine große Anzahl von Elektronenstößen stattfinden, d. h. für verhältnismäßig lange Wellen.

Diese Methode kann man nun offenbar dazu benutzen, um auf einem neuen, von dem früher eingeschlagenen ganz unabhängigen Wege die Gesetze der schwarzen Strahlung für lange Wellen abzuleiten. Denn wenn man das so berechnete Emissionsvermögen E des Metalls dividiert durch das mittels der galvanischen Leitungsfähigkeit bestimmte Absorptionsvermögen A desselben Metalls, so muß nach dem KIRCHHOFFschen Gesetz (48) das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers, unabhängig von jeder speziellen Substanz, resultieren. Auf diese Weise hat H. A. LORENTZ[1] in einer tiefgehenden Untersuchung das Strahlungsgesetz eines schwarzen Körpers abgeleitet und ist dabei zu einem Resultat gekommen, das inhaltlich genau mit der Gleichung (240) übereinstimmt, wobei auch die Konstante k mit der Gaskonstante R wieder durch die Gleichung (217) zusammenhängt. Diese Art der Begründung der Strahlungsgesetze ist zwar auf das Gebiet langer Wellen beschränkt, aber dafür gewährt sie einen tieferen, höchst bedeutungsvollen Einblick in den Mechanismus der Elektronenbewegungen und der durch sie bedingten Strahlungsvorgänge in Metallen. Zugleich wird dadurch die oben in § 160 geschilderte

[1] H. A. LORENTZ, Proc. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam 1903, p. 666.

Auffassung ausdrücklich bestätigt, wonach das Normalspektrum als zusammengesetzt aus einer großen Schar gänzlich unregelmäßiger Elementarvorgänge betrachtet werden kann.

§ 165. Eine weitere interessante Bestätigung des Strahlungsgesetzes schwarzer Körper für lange Wellen und des Zusammenhanges der Strahlungskonstanten k mit der absoluten Masse der ponderablen Moleküle hat vor kurzem J. H. JEANS[1] aufgefunden, auf einem schon vorher von Lord RAYLEIGH[2] beschrittenen Wege, welcher sich dadurch wesentlich von dem hier eingeschlagenen unterscheidet, daß er die Heranziehung von speziellen Wechselwirkungen zwischen der Materie (Moleküle, Oszillatoren) und dem Äther ganz vermeidet und im wesentlichen nur auf die Vorgänge im durchstrahlten Vakuum eingeht. Den Ausgangspunkt dieser Betrachtungsweise liefert folgender Satz der statistischen Mechanik (vgl. oben § 154). Wenn in einem den HAMILTONschen Bewegungsgleichungen gehorchenden System, dessen Zustand durch die Werte einer großen Anzahl von unabhängigen Variabeln bestimmt ist, und dessen Gesamtenergie sich additiv aus verschiedenen von den einzelnen Zustandsvariablen quadratisch abhängigen Teilen zusammensetzt, irreversible Prozesse stattfinden, so vollziehen sich diese durchschnittlich immer in der Richtung, daß die auf die einzelnen unabhängigen Zustandsvariablen entfallenden Teilenergien sich gegenseitig ausgleichen, so daß schließlich, bei Erreichung des statistischen Gleichgewichts, alle im Mittel einander gleich geworden sind. Nach diesem Satze läßt sich also in einem solchen System die stationäre Energieverteilung angeben, sobald man nur die unabhängigen Variabeln kennt, durch welche der Zustand bestimmt ist.

Wir denken uns nun ein reines Vakuum in der Form eines Würfels von der Kantenlänge l, mit metallisch spiegelnden Seitenflächen. Legt man den Koordinatenanfangspunkt in eine Ecke des Würfels und die Koordinatenachsen in die anstoßenden Kanten, so wird ein in diesem Hohlraum möglicher elektromagnetischer Vorgang dargestellt durch das folgende System von Gleichungen:

---

[1] J. H. JEANS, Phil. Mag., **10**, p. 91, 1905.

[2] Lord RAYLEIGH, Nature **72**, p. 54 und p. 243, 1905.

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= \cos\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cdot\sin\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cdot\sin\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l}\cdot(e_1\cos 2\pi\nu t+e_1'\sin 2\pi\nu t),\\
\mathfrak{E}_y &= \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cdot\sin\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l}\cdot(e_2\cos 2\pi\nu t+e_2'\sin 2\pi\nu t),\\
\mathfrak{E}_z &= \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cdot\sin\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cdot\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l}\cdot(e_3\cos 2\pi\nu t+e_3'\sin 2\pi\nu t),\\
\mathfrak{H}_x &= \sin\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cdot\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l}\cdot(h_1\sin 2\pi\nu t-h_1'\cos 2\pi\nu t),\\
\mathfrak{H}_y &= \cos\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cdot\sin\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cdot\cos\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l}\cdot(h_2\sin 2\pi\nu t-h_2'\cos 2\pi\nu t),\\
\mathfrak{H}_z &= \cos\frac{\mathfrak{a}\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\mathfrak{b}\pi y}{l}\cdot\sin\frac{\mathfrak{c}\pi z}{l}\cdot(h_3\sin 2\pi\nu t-h_3'\cos 2\pi\nu t),
\end{aligned}\right\}\quad(264)$$

wobei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ irgend drei positive ganze Zahlen bedeuten. Die Grenzbedingungen sind in diesen Ausdrücken dadurch befriedigt, daß für die sechs Grenzflächen $x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = l$, $z = 0$, $z = l$ die tangentiellen Komponenten der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ verschwinden. Die MAXWELLschen Feldgleichungen (52) werden ebenfalls, wie man durch Substitution erkennen kann, sämtlich befriedigt, wenn zwischen den Konstanten gewisse Beziehungen bestehen, welche sich alle in einen einzigen Satz zusammenfassen lassen: Bezeichnet man mit a eine gewisse positive Konstante, so bestehen zwischen den neun quadratisch angeordneten Größen:

$$\begin{array}{ccc}
\frac{\mathfrak{a}c}{2l\nu} & \frac{\mathfrak{b}c}{2l\nu} & \frac{\mathfrak{c}c}{2l\nu}\\[2ex]
\frac{h_1}{a} & \frac{h_2}{a} & \frac{h_3}{a}\\[2ex]
\frac{e_1}{a} & \frac{e_2}{a} & \frac{e_3}{a}
\end{array}$$

alle diejenigen Relationen, welche die neun sogenannten „Richtungskosinus" zweier orthogonaler rechtshändiger Koordinatensysteme, d. h. die Kosinus der Winkel je zweier Achsen der beiden Systeme, erfüllen.

Daher ist die Summe der Quadrate der Glieder jeder Horizontalreihe oder jeder Vertikalreihe $= 1$, also z. B.

$$\frac{c^2}{4l^2\nu^2}(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2)=1 \qquad (265)$$

$$h_1^2+h_2^2+h_3^2=a^2=e_1^2+e_2^2+e_3^2,$$

Ferner ist die Summe der Produkte entsprechender Glieder in je zwei Parallelreihen gleich null. Also z. B.

$$\mathfrak{a}\,e_1 + \mathfrak{b}\,e_2 + \mathfrak{c}\,e_3 = 0, \tag{266}$$
$$\mathfrak{a}\,h_1 + \mathfrak{b}\,h_2 + \mathfrak{c}\,h_3 = 0.$$

Ferner gelten Relationen von der Form:

$$\frac{h_1}{a} = \frac{e_2}{a}\cdot\frac{\mathfrak{c}\,c}{2l\nu} - \frac{e_3}{a}\cdot\frac{\mathfrak{b}\,c}{2l\nu},$$

also:

$$h_1 = \frac{c}{2l\nu}(\mathfrak{c}\,e_2 - \mathfrak{b}\,e_3), \text{ usw.} \tag{267}$$

Wenn die ganzen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gegeben sind, so ist nach (265) die Schwingungszahl ν unmittelbar dadurch bestimmt. Dann lassen sich von den sechs Größen e_1, e_2, e_3, h_1, h_2, h_3 nur noch zwei beliebig wählen, die übrigen sind dann eindeutig, und zwar linear und homogen, durch sie bestimmt. Nimmt man z. B. e_1 und e_2 willkürlich an, so berechnet sich e_3 aus (266) und dann folgen die Werte von h_1, h_2, h_3 aus den Relationen von der Form (267). Zwischen den gestrichenen Konstanten e_1', e_2', e_3', h_1', h_2', h_3' bestehen genau dieselben Beziehungen wie zwischen den ungestrichenen, von denen sie ihrerseits ganz unabhängig sind. Daher lassen sich auch von ihnen noch zwei beliebig wählen, etwa h_1' und h_2', so daß von allen in den obigen Gleichungen vorkommenden Konstanten bei gegebenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ noch vier Konstante unbestimmt bleiben. Bildet man nun für jedes beliebige Zahlensystem $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Ausdrücke von der Form (264) und summiert die entsprechenden Feldkomponenten, so erhält man wiederum eine Lösung der Maxwellschen Feldgleichungen und Grenzbedingungen, welche aber nun so allgemein ist, daß sie jeden beliebigen in dem betrachteten Hohlwürfel möglichen elektromagnetischen Vorgang darzustellen vermag. Denn über die in den einzelnen partikulären Lösungen unbestimmt gebliebenen Konstanten e_1, e_2, h_1', h_2' kann immer so verfügt werden, daß der Vorgang jedem beliebigen Anfangszustand ($t = 0$) angepaßt werden kann.

Ist nun, wie wir bisher angenommen haben, der Hohlraum ganz von Materie entblößt, so ist der Strahlungsvorgang bei gegebenem Anfangszustand in allen seinen Einzelheiten eindeutig

bestimmt. Er zerfällt in eine Reihe von stehenden Schwingungen, deren jede durch eine der betrachteten partikulären Lösungen dargestellt wird, und die vollständig unabhängig voneinander verlaufen. Von Irreversibilität kann also hierbei keine Rede sein, und daher auch nicht von der Tendenz zu einem Ausgleich der auf die einzelnen Partialschwingungen entfallenden Teilenergien. Sobald man aber auch nur eine Spur von Materie in dem Hohlraum befindlich annimmt, welche die elektrodynamischen Schwingungen beeinflussen können, z. B. einige Gasmoleküle, welche Strahlung emittieren und absorbieren, so wird der Vorgang ungeordnet, und es wird sich, wenn auch langsam, ein Übergang von weniger wahrscheinlichen zu wahrscheinlicheren Zuständen vollziehen. Ohne nun auf irgendeine nähere Einzelheit in der elektromagnetischen Konstitution der Moleküle einzugehen, kann man aus dem oben angeführten Satz der statistischen Mechanik den Schluß ziehen, daß unter allen möglichen Vorgängen derjenige einen stationären Charakter besitzt, bei welchem die Energie sich gleichmäßig auf alle unabhängigen Variabeln des Zustandes verteilt hat.

Bestimmen wir also diese unabhängigen Variabeln. Zunächst sind es die Geschwindigkeitskomponenten der Gasmoleküle. Jeder der drei voneinander unabhängigen Geschwindigkeitskomponenten eines Moleküls entspricht mithin im stationären Zustand durchschnittlich die Energie $\frac{1}{3}L$, wo L die mittlere Energie eines Moleküls darstellt und durch (222) gegeben ist (vgl. § 154). Ebenso groß ist also die Teilenergie, welche im stationären Zustand durchschnittlich auf jede der unabhängigen Variabeln des elektromagnetischen Systems entfällt.

Nun ist nach den obigen Ausführungen der elektromagnetische Zustand des ganzen Hohlraums für jede einzelne, je einem bestimmten Wertensystem der Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ entsprechende stehende Schwingung in irgendeinem Zeitpunkt durch vier voneinander unabhängige Größen bestimmt. Folglich ist für die Strahlungsvorgänge die Anzahl der unabhängigen Zustandsvariablen 4mal so groß als die Anzahl der möglichen Wertensysteme der positiven ganzen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Wir wollen nun die Anzahl der möglichen Wertensysteme $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ berechnen, welche den Schwingungen innerhalb eines bestimmten kleinen Spektralbezirks, etwa zwischen den Schwingungs-

zahlen ν und $\nu + d\nu$, entsprechen. Nach (265) genügen diese Wertensysteme den Ungleichungen:

$$(268) \qquad \left(\frac{2l\nu}{c}\right)^2 < \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 < \left(\frac{2l(\nu + d\nu)}{c}\right)^2,$$

wobei nicht nur $\frac{2l\nu}{c}$, sondern auch $\frac{2l\,d\nu}{c}$ als große Zahl zu denken ist. Versinnlichen wir uns jedes Wertensystem der $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ durch einen Punkt, indem wir die Werte der positiven ganzen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ als Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auffassen, so erfüllen die so erhaltenen Punkte einen Oktanten des unendlichen Raumes, und die Bedingung (268) ist gleichbedeutend mit der, daß die Entfernung eines dieser Punkte vom Anfangspunkt der Koordinaten zwischen den Werten $\frac{2l\nu}{c}$ und $\frac{2l(\nu + d\nu)}{c}$ liegt. Die gesuchte Zahl ist daher gleich der Zahl der Punkte, welche zwischen den beiden Kugelflächenoktanten gelegen sind, die den Radien $\frac{2l\nu}{c}$ und $\frac{2l(\nu + d\nu)}{c}$ entsprechen. Da nun jedem Punkt ein Würfel vom Volumen 1 entspricht, und umgekehrt, so ist jene Zahl einfach gleich dem Volumen der genannten Kugelschicht, also gleich:

$$\frac{1}{8} \cdot 4\pi \left(\frac{2l\nu}{c}\right)^2 \cdot \frac{2l\,d\nu}{c},$$

und die Anzahl der entsprechenden unabhängigen Zustandsvariabeln gleich dem Vierfachen davon:

$$\frac{16\pi l^3 \nu^2\, d\nu}{c^3}.$$

Da nun auf jede unabhängige Zustandsvariable beim stationären Vorgang durchschnittlich die Teilenergie $\frac{L}{3}$ entfällt, so kommt auf das Intervall der Schwingungszahlen von ν bis $\nu + d\nu$ im ganzen die Energie:

$$\frac{16\pi l^3 \nu^2\, d\nu}{3c^3} \cdot L.$$

Dies ergibt, da das Volumen des Hohlraums l^3 ist, für die räumliche Energiedichte der Schwingungszahl ν:

$$\mathfrak{u}\, d\nu = \frac{16\pi \nu^2\, d\nu}{3c^3} \cdot L,$$

und mit Substitution des Wertes von L aus (222):

$$u = \frac{8\pi\nu^2 k T}{c^3}. \tag{269}$$

§ 166. Ein Vergleich der letzten Formel mit (242) zeigt, daß wir durch die statistische Mechanik zu genau demselben Zusammenhang zwischen Strahlungsdichte, Temperatur und Schwingungszahl geführt werden, wie durch das aus den Resonatorschwingungen abgeleitete Strahlungsgesetz, allerdings nur für hinreichend lange Wellen, bez. hohe Temperaturen. Denn nur unter dieser Bedingung ist die Gleichung (242) gültig. Aus dieser Beschränkung erwächst für die Anwendung der statistischen Mechanik auf die Strahlungsvorgänge eine gewisse Schwierigkeit. Denn würde man den Satz von der gleichmäßigen Energieverteilung auf alle unabhängige Zustandsvariabeln vollständig unbeschränkt anwenden, so müßte jene Beziehung ganz allgemein für alle Temperaturen und Schwingungszahlen gelten, und das würde, wie man leicht sieht, die Unmöglichkeit einer stationären Energieverteilung zur Folge haben, da die Energiedichte zugleich mit der Schwingungszahl unbegrenzt zunehmen würde.

Diese Schwierigkeit sucht J. H. Jeans[1] durch die Annahme zu heben, daß in einem mit emittierender und absorbierender Substanz versehenen durchstrahlten Hohlraum gar kein wirklich stabiler Strahlungszustand existiert, sondern daß die gesamte vorhandene Energie im Laufe der Zeit in Wärmestrahlung von immer höheren Schwingungszahlen übergeht, bis schließlich die Geschwindigkeit der Molekularbewegung unmerklich klein und die absolute Temperatur derselben daher gleich Null geworden ist.

Einer solchen Annahme kann ich mich aber nicht anschließen. Denn wenn je ein aus der alltäglichen Erfahrung genommener Satz dadurch an Zuverlässigkeit gewinnt, daß die verschiedensten aus ihm gezogenen Folgerungen sich als mit den feinsten Messungen in Übereinstimmung erweisen, so trifft dies bei dem Satze zu, daß die Strahlung in einem mit Materie versehenen Hohlraum einem Endzustand mit bestimmter endlicher Energieverteilung zwischen Materie und Äther zustrebt.

[1] J. H. Jeans, Proc. Roy. Soc. Vol. 76 A, p. 296, 545, 1905.

Alle bisher in der Theorie der Wärmestrahlung gezogenen, zum Teil auf den ersten Blick sehr kühn erscheinenden thermodynamischen Konsequenzen, von dem KIRCHHOFFschen Satze der Proportionalität des Emissionsvermögens und des Absorptionsvermögens angefangen, beruhen auf der Annahme der Existenz eines im thermodynamischen Sinn absoluten Gleichgewichtszustandes, und ihnen allen würde der Boden entzogen, wenn man jene Annahme fallen ließe; dagegen ist noch niemals eine Folgerung jenes Satzes im Widerspruch mit der Erfahrung befunden worden. Andererseits hat sich bisher nicht die Spur einer Andeutung dafür gezeigt, die auf die Vermutung führen könnte, daß wir es bei der schwarzen Strahlung nicht mit einem wirklich stabilen Zustand zu tun haben, im Gegenteil: schon die einfache Tatsache, daß ein Körper durch Wärmestrahlung erwärmt werden kann, daß also strahlende Energie ohne Kompensation in Energie der Molekularbewegung übergehen kann, ließe sich von jenem Standpunkt aus wohl nur schwer mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in Einklang bringen.

Ich bin daher der Meinung, daß die besprochene Schwierigkeit nur durch eine unberechtigte Anwendung des Satzes von der Gleichmäßigkeit der Energieverteilung auf alle unabhängigen Zustandsvariabeln hervorgerufen ist. In der Tat ist für die Gültigkeit dieses Satzes die Voraussetzung wesentlich, daß die Zustandsverteilung unter allen bei gegebener Gesamtenergie von vornherein möglichen Systemen eine „ergodische" ist,[1] oder kurz ausgedrückt, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Zustand des Systems in einem bestimmten kleinen „Elementargebiet" (§ 150) liegt, einfach proportional ist der Größe dieses Gebiets, wenn dasselbe auch noch so klein genommen wird. Diese Voraussetzung ist aber bei der stationären Energiestrahlung nicht erfüllt; denn die Elementargebiete dürfen nicht beliebig klein genommen werden, sondern ihre Größe ist eine endliche, durch den Wert des elementaren Wirkungsquantums h bestimmte. Nur wenn man das Wirkungselement h unendlich klein annehmen dürfte, würde man zu dem Gesetz der gleichmäßigen Energieverteilung gelangen. In der Tat geht für unendlich kleines h,

[1] L. BOLTZMANN, Gastheorie II, p. 92, 101, 1898.

wie man aus der Formel (233) ersieht, die allgemeine Energieverteilung in die spezielle hier abgeleitete (269) über, und es gelten dann überhaupt alle Beziehungen des § 154, entsprechend dem RAYLEIGHschen Strahlungsgesetz. Dann werden, entsprechend dem Satz von der gleichmäßigen Energieverteilung, auch die Energien aller Resonatoren einander gleich, was im allgemeinen nicht der Fall ist.

Natürlich muß dem Wirkungselement h auch eine direkte elektrodynamische Bedeutung zukommen; aber welcher Art diese ist, bleibt zunächst noch eine offene Frage.

Fünfter Abschnitt.

Irreversible Strahlungsvorgänge.

Erstes Kapitel.
Einleitung. Direkte Umkehrung eines Strahlungsvorgangs.

§ 167. Nach den Entwickelungen im vorigen Abschnitt kann man die Natur der Wärmestrahlung innerhalb eines im stabilen thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen isotropen Mediums in allen Stücken als bekannt ansehen. Die Intensität der nach allen Richtungen gleichmäßigen Strahlung hängt für alle Wellenlängen ausschließlich von der Temperatur und von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ab, nach der Gleichung (259) für die schwarze Strahlung in einem beliebigen Medium. Aber damit ist die Aufgabe der Theorie noch nicht erledigt; dieselbe hat vielmehr auch davon noch Rechenschaft abzulegen, in welcher Weise und durch welche Vorgänge eine ursprünglich in dem Medium vorhandene ganz beliebig gegebene Strahlung, wenn das Medium nach außen durch eine undurchlässige Hülle abgeschlossen ist, allmählich in den stabilen, dem Maximum der Entropie entsprechenden Zustand der schwarzen Strahlung übergeht, ähnlich wie ein in ein festes Gefäß eingeschlossenes Gas, in dem ursprünglich beliebig gegebene Strömungen und Temperaturdifferenzen vorhanden waren, allmählich in den Zustand der Ruhe und der gleichmäßigen Temperaturverteilung übergeht.

Diese sehr viel schwierigere Frage läßt sich bis jetzt nur in beschränktem Umfang beantworten. Zunächst ist nach den ausführlichen Erörterungen im ersten Kapitel des vorigen Abschnitts klar, daß man, da es sich hier um irreversible Prozesse handelt, mit den Prinzipien der reinen Elektrodynamik allein nicht auskommen wird. Denn der reinen Elektrodynamik ist,

ebenso wie der reinen Mechanik, der zweite Hauptsatz der Thermodynamik oder das Prinzip der Vermehrung der Entropie inhaltlich fremd. Dies zeigt sich am unmittelbarsten in dem Umstand, daß die Grundgleichungen sowohl der Mechanik als auch der Elektrodynamik die direkte zeitliche Umkehrung eines jeden Vorgangs gestatten, in geradem Widerspruch mit dem Prinzip der Vermehrung der Entropie. Selbstverständlich müssen hier alle Arten von Reibung und galvanischer Stromleitung ausgeschlossen gedacht werden; denn diese Vorgänge gehören, da sie stets mit Wärmeerzeugung verbunden sind, nicht mehr der reinen Mechanik oder Elektrodynamik an.

Setzt man dies voraus, so kommt in den Grundgleichungen der Mechanik die Zeit t nur in den Beschleunigungskomponenten, also in der Form des Quadrats ihres Differentials vor. Wenn man also in den Bewegungsgleichungen als Zeitvariable die Größe $-t$ statt t einführt, so behalten dieselben ihre Form unverändert bei, und daraus folgt, daß, wenn man bei einer Bewegung eines Systems materieller Punkte in irgend einem Augenblick die Geschwindigkeitskomponenten sämtlicher Punkte plötzlich umkehrt, die Bewegung genau rückwärts verlaufen muß. Für die elektrodynamischen Vorgänge in einem homogenen nichtleitenden Medium gilt ganz Ähnliches. Wenn man in den MAXWELLschen Gleichungen des elektrodynamischen Feldes überall $-t$ statt t schreibt, und außerdem das Vorzeichen der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ umkehrt, so bleiben die Gleichungen, wie man leicht sehen kann, unverändert, und daraus folgt, daß, wenn bei irgend einem elektrodynamischen Vorgang in einem gewissen Zeitpunkt die magnetische Feldstärke überall plötzlich umgekehrt wird, während die elektrische Feldstärke ihren Wert behält, der ganze Vorgang in umgekehrter Richtung verlaufen muß.

§ 168. So unmittelbar dieser Satz, daß alle rein elektrodynamischen Vorgänge auch in umgekehrter Richtung verlaufen können, für die Ausbreitung elektrodynamischer Wellen im reinen Vakuum zu erweisen ist, so scheint er auf den ersten Blick seine Gültigkeit zu verlieren bei den im dritten Abschnitt von uns betrachteten Oszillatorschwingungen. Denn die Gleichung (171) für die Schwingungen eines solchen Oszillators lautet:

$$(270) \qquad Kf + L\dot{f} - \frac{2}{3c^3}\ddot{f} = \mathfrak{E}_z,$$

wobei $\mathfrak{E}_z$ die z-Komponente der elektrischen Feldstärke der erregenden primären Welle am Orte des Oszillators bezeichnet. Führt man nun in dieser Gleichung die Differentiation von f, statt nach t, nach $-t$ aus, so ändert das Dämpfungsglied sein Vorzeichen, und man könnte daher zu glauben versucht sein, daß ein Schwingungsvorgang nicht in umgekehrter Richtung verlaufen kann. Das wäre aber ein Fehlschluß. Denn zu dem ganzen Schwingungsvorgang gehört nicht nur die Schwingung des Oszillators selber, sondern auch die ihn erregende primäre Welle, und wenn von einer Umkehrung des Vorgangs gesprochen wird, so muß nicht nur der Oszillator, sondern auch das äußere Feld in Betracht gezogen werden. Nun sendet der schwingende Oszillator nach dem, was wir früher (§ 107) gesehen haben, eine bestimmte Kugelwelle in das umgebende Vakuum hinaus, folglich wird er bei der Umkehrung des ganzen Vorgangs nicht nur von der umgekehrten ursprünglich primären Welle $\mathfrak{E}_z$, sondern zugleich auch von der umgekehrten Kugelwelle, d. h. von einer nach innen zu auf den Oszillator als Zentrum fortschreitenden Kugelwelle erregt, und es frägt sich, wie seine Schwingungen sich nun, unter diesem doppelten Einfluß, gestalten. Diese Frage soll im folgenden allgemein untersucht werden.

§ 169. Zuerst betrachten wir die Eigenschaften der von außen nach innen auf den Oszillator als Zentrum zu fortschreitenden Kugelwelle, welche die Umkehrung der direkten vom Oszillator ausgesandten Kugelwelle darstellt. Die direkte Welle ist gegeben durch die Gleichungen (145), wenn man darin für die Funktion F den in (148) angegebenen Ausdruck setzt. Deshalb wird die umgekehrte Welle, die entsteht, wenn zur Zeit $t = 0$ alle magnetischen Feldstärken der direkten Welle plötzlich umgekehrt werden, dargestellt durch die nämlichen Gleichungen (145), wenn man darin für die Funktion F setzt:

$$(271) \qquad F = \frac{1}{r} \cdot f\left(-t - \frac{r}{c}\right).$$

Denn durch Substitution in (145) ergeben sich daraus die nämlichen Ausdrücke für die Komponenten der Feldstärke wie für

die direkte Welle, nur daß überall $-t$ statt t steht, und daß das Vorzeichen der magnetischen Feldstärke umgekehrt ist. In der Tat bezeichnet die Wellenfunktion (271) eine nach innen fortschreitende Kugelwelle.

Es handelt sich jetzt um die Größe der elektrischen Kraft, mit der diese sich auf den Oszillator zusammenziehende Kugelwelle den Oszillator erregt. Das ist nach den allgemeinen Sätzen des § 111 die x-Komponente der elektrischen Feldstärke, welche diese Welle am Orte des Oszillators besitzen würde, wenn derselbe gar nicht vorhanden wäre. Lassen wir also einmal den Oszillator ganz weg und betrachten den Verlauf der von außen nach innen fortschreitenden Kugelwelle (271). Dieselbe wird im Kugelmittelpunkt, also im Anfangspunkt der Koordinaten, durch sich selber hindurchgehen, und zwar so, daß das elektromagnetische Feld der Welle endlich und stetig bleibt; denn es ist unmöglich, daß eine ursprünglich endliche Welle im freien Vakuum irgendwo und irgendwann eine unendlich große Feldstärke erzeugt. Nehmen wir also den Ausdruck der durch sich selbst hindurchgegangenen nach außen fortschreitenden Kugelwelle mit in die Wellenfunktion F auf, so erhalten wir vollständiger als in (271):

$$F = \frac{1}{r} f\left(-t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(-t + \frac{r}{c}\right),$$

wobei nun f die nach innen fortschreitende, g die durch sich selbst hindurchgegangene nach außen fortschreitende Welle bedeutet. Da für $r = 0$ F für alle Zeiten endlich bleiben muß, so ergibt sich:

$$f(-t) + g(-t) = 0.$$

Folglich:
$$F = \frac{1}{r} f\left(-t - \frac{r}{c}\right) - \frac{1}{r} f\left(-t + \frac{r}{c}\right). \qquad (272)$$

Mit diesem Werte von F stellen die Gleichungen (145) die direkte Umkehrung der vom schwingenden Oszillator emittierten Welle auch in ihrem späteren Verlauf vor. Sie schreitet nach innen fort und streicht über den Oszillator hinweg, ohne dortselbst unendlich oder unstetig zu werden, wie das überhaupt bei jeder den Oszillator erregenden Welle der Fall ist. Berechnen wir jetzt die x-Komponente der elektrischen Feldstärke

dieser Welle am Orte des Oszillators. Für hinreichend kleine Werte von r wird:

$$f\left(-t-\frac{r}{c}\right)=f(-t)-\frac{r}{c}f'(-t)+\frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2}f''(-t)-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{r^3}{c^3}f'''(-t),$$

$$f\left(-t+\frac{r}{c}\right)=f(-t)+\frac{r}{c}f'(-t)+\frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2}f''(-t)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{r^3}{c^3}f'''(-t),$$

wobei die Ableitungen f', f'', f''' von f immer, auch im folgenden, nach dem Argument, nicht etwa nach t, genommen zu denken sind.

Daraus folgt für die Wellenfunktion (272):

$$F=-\frac{2}{c}f'(-t)-\frac{1}{3}\frac{r^3}{c^3}f'''(-t).$$

Dies ergibt nach (145) für die x-Komponente der elektrischen Feldstärke am Orte $r=0$, da $r^2=x^2+y^2+z^2$:

$$\mathfrak{E}_x=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=\frac{4}{3}\frac{1}{c^3}f'''(-t). \tag{273}$$

§ 170. Nachdem wir nun die elektrische Kraft festgestellt haben, mit welcher die sich nach innen fortpflanzende, durch die Umkehrung der ursprünglich emittierten Kugelwelle entstandene Kugelwelle den Oszillator erregt, wollen wir die Schwingungen berechnen, welche der Oszillator ausführt, wenn außer der umgekehrten primären Welle auch noch die umgekehrte Kugelwelle auf ihn einwirkt. Bezeichnen wir die gesuchte Schwingung mit $f'(t)$, so muß nach der allgemeinen Schwingungsgleichung (270) gelten:

$$Kf'(t)+Lf''(t)-\frac{2}{3c^3}f'''(t)=\mathfrak{E}_x(-t)+\frac{4}{3}\frac{1}{c^3}f'''(-t). \tag{274}$$

Denn als erregende Schwingung haben wir hier einzusetzen einmal die der umgekehrten primären Welle, und dann die der umgekehrten Kugelwelle (273).

Die Gleichung (274) wird befriedigt, wenn man setzt:

$$f'(t)=f(-t), \tag{275}$$

also $\quad f''(t)=-f'(-t), \quad f'''(t)=f''(-t), \quad f''''(t)=-f'''(-t).$

Denn dann ergibt sich aus (274):

$$Kf(-t)+Lf''(-t)-\frac{2}{3c^3}f'''(-t)=\mathfrak{E}_x(-t)$$

und diese Gleichung ist genau erfüllt für alle positiven Werte

von t, wenn die Gleichung (270) für alle negativen Werte von t, d. h. für alle Zeiten, welche dem Augenblick der Umkehrung, $t = 0$, vorausgehen, erfüllt ist. Hierdurch ist die Schwingung (275) des Oszillators für alle positiven Zeiten gegeben, und sie stellt, wie man sieht, in allen Stücken die Umkehrung des direkten Schwingungsvorgangs dar.

§ 171. Fassen wir nun weiter die bei dem umgekehrten Vorgang vom Oszillator emittierte Welle ins Auge, so wird dieselbe nach (148) dargestellt durch eine nach außen fortschreitende Kugelwelle mit der Wellenfunktion:

$$\frac{1}{r} f'\left(t - \frac{r}{c}\right). \tag{276}$$

Dieser Welle superponiert sich die oben betrachtete durch das Kugelzentrum hindurchgegangene und nun ebenfalls nach außen fortschreitende Kugelwelle, deren Wellenfunktion nach (272) den Wert besitzt:

$$-\frac{1}{r} f\left(-t + \frac{r}{c}\right). \tag{277}$$

Nun ist gemäß der Beziehung (275) die Summe der beiden Wellenfunktionen (276) und (277) gleich Null, die beiden nach außen fortschreitenden Kugelwellen vernichten sich also gegenseitig, und wir erhalten das Resultat, daß bei dem betrachteten umgekehrten Vorgang überhaupt keine Kugelwelle vom Oszillator nach außen geht.

Wenn man alles zusammenfaßt, so besteht mithin der umgekehrte Vorgang einfach darin, daß die ursprüngliche primäre Welle wieder rückwärts geht und daß der Oszillator die ursprünglich emittierte Welle wieder in sich aufnimmt, ohne eine neue Welle nach außen zu entsenden, wobei er seine Schwingungen genau in umgekehrter Reihenfolge wiederholt.[1]

§ 172. Nehmen wir als Beispiel den speziellen Fall, daß überhaupt keine primäre Welle vorhanden ist, die den Oszillator zu Schwingungen anregt. Dann erfolgt einfaches Abklingen der Oszillatorschwingungen, mit konstantem Dekrement, nach Gleichung (169), indem die Schwingungsenergie in Form von Kugelwellen allmählich in den Raum hinausgestrahlt wird. Kehrt

[1] Vgl. L. Boltzmann, Sitzungsber. d. Berliner Akad. d. Wissensch. vom 3. März 1898, p. 182.

man nun zu irgend einer Zeit die magnetischen Feldstärken der emittierten Kugelwelle überall plötzlich um und ebenso den Strom f' im Oszillator, so geht der Vorgang genau umgekehrt vor sich: die Kugelwelle kehrt zum Oszillator zurück, seine Schwingungen werden mit konstantem Inkrement verstärkt, und er saugt die früher ausgestrahlte Energie vollständig wieder ein, ohne dabei irgendwelche Energiebeträge auszustrahlen.

§ 173. Ein anderes drastisches Beispiel erhalten wir, wenn ein Oszillator, der ursprünglich gar keine Energie besitzt ($f = 0$, $f' = 0$) von einer ebenen periodischen Welle getroffen wird. Der Oszillator wird allmählich immer stärker ins Mitschwingen geraten, bis der in § 112 ff. ausführlich untersuchte stationäre Vorgang entsteht, wobei der Oszillator in der Periode der erregenden primären Welle schwingt, mit einem größeren oder kleineren Phasenunterschied gegen dieselbe, und zugleich eine gewisse Menge Energie nach allen Richtungen des Raumes ausstrahlt, die er der primären Welle entzieht (§ 115). Kehren wir nun den ganzen Vorgang plötzlich um, so wird die primäre Welle den umgekehrten Weg gehen; beim Passieren des Oszillators nimmt sie die früher an ihn abgegebene Energie wieder von ihm zurück, und dadurch wird, obwohl der Oszillator gleichzeitig von der zu ihm zurückkehrenden Kugelwelle gespeist wird, und obwohl er jetzt gar keine Energie mehr durch Emission verliert, dennoch seine Energie beständig verkleinert, bis sie zuletzt Null wird, indem f und f' beide verschwinden. Wir haben hier also den Fall, daß eine primäre Welle einem Oszillator, auf den sie fällt, die gesamte Schwingungsenergie vollständig entzieht.

§ 174. Die letzten Beispiele umgekehrt verlaufender elektrodynamischer Strahlungsvorgänge machen es besonders deutlich, daß hier von einer Gültigkeit der Gesetze der Wärmestrahlung, insbesondere von einer steten Vermehrung der Entropie, nicht die Rede sein kann, und wir kommen daher wieder auf den schon im vorigen Abschnitt gezogenen Schluß zurück, daß eine Ableitung jener Gesetze aus der reinen Elektrodynamik nicht erfolgen kann ohne besondere Hypothesen, deren Inhalt auf eine Einschränkung der elektrodynamischen Möglichkeiten hinausläuft. Man erkennt aber auch sogleich, daß die zuletzt beschriebenen, vom Standpunkt der Thermodynamik ganz un-

verständlichen Vorgänge nur durch eine besondere Eigentümlichkeit der den Oszillator erregenden Wellen zustande kommen. Die bei der Umkehrung eines Strahlungsvorganges von verschiedenen Seiten auf den Oszillator fallenden Strahlen sind nämlich in ganz spezieller Weise abhängig von der Vorgeschichte des Oszillators und dadurch auch abhängig voneinander. Würde man nur solche Strahlungsvorgänge als möglich zulassen, bei denen die von verschiedenen Seiten auf den Oszillator fallenden Strahlen keinerlei gesetzmäßige Beziehungen zueinander aufweisen, so könnte ein derartiger umgekehrter Vorgang gar nicht zustande kommen, und die Irreversibilität der Strahlungsvorgänge erschiene wenigstens nicht von vornherein ausgeschlossen. Eine solche Beschränkung in den Eigenschaften der auffallenden Strahlung ist nun enthalten in der Hypothese der „natürlichen Strahlung", von der in den nächsten Kapiteln gezeigt werden soll, daß sie in der Tat die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik auch für strahlende Energie gewährleistet.

Zweites Kapitel. Ein Oszillator in beliebigem Strahlungsfelde. Hypothese der natürlichen Strahlung.

§ 175. Wir behandeln jetzt genau die nämliche Aufgabe wie im 3. Kapitel des dritten Abschnitts, nur unter der allgemeineren Voraussetzung, daß das Vakuum, in dem sich der Oszillator befindet, nicht von gleichmäßiger stationärer Strahlung, sondern von örtlich und zeitlich beliebig veränderlichen Strahlen erfüllt ist, die nach allen möglichen Richtungen den Raum durchkreuzen.

Sei wieder $f(t)$ das Moment des von dem linearen Oszillator zur Zeit t dargestellten elektrischen Dipols, $\mathfrak{E}_s(t)$ die in die Richtung der Oszillatorachse fallende Komponente der Feldstärke des elektromagnetischen Feldes, welches von den im Vakuum sich fortpflanzenden Wellen am Orte des Oszillators gebildet wird, so ist die Schwingung des Oszillators bestimmt durch seinen Anfangszustand (für $t = 0$) und durch die Differentialgleichung (172).

Wir beschränken von vornherein die ganze Betrachtung auf ein begrenztes, wenn auch sehr großes, nötigenfalls nach Jahren

zählendes Zeitintervall, etwa von $t = 0$ bis $t = T$. Dann läßt sich die Funktion $\mathfrak{E}_z(t)$ für dieses Zeitintervall jedenfalls folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{E}_z = \int_0^\infty d\nu \cdot C_\nu \cos(2\pi\nu t - \vartheta_\nu), \tag{278}$$

wobei C_ν (positiv) und ϑ_ν gewisse Funktionen der positiven Integrationsvariabeln ν bedeuten, deren Werte übrigens durch das Verhalten der Größe $\mathfrak{E}_z$ in dem genannten Zeitintervall bekanntlich noch nicht bestimmt sind, sondern außerdem noch von der Art abhängen, wie die Zeitfunktion $\mathfrak{E}_z$ über jenes Intervall hinaus nach beiden Seiten fortgesetzt wird. Daher besitzen die Größen C_ν und ϑ_ν einzeln gar keine bestimmte physikalische Bedeutung, und es wäre auch ganz unrichtig, wenn man die Schwingung $\mathfrak{E}_z$ sich etwa als ein kontinuierliches Spektrum von periodischen Schwingungen mit den konstanten Amplituden C_ν vorstellen würde, wie man übrigens auch schon daraus erkennt, daß der Charakter der Schwingung $\mathfrak{E}_z$ sich ja im Laufe der Zeit beliebig ändern kann. Wie die spektrale Zerlegung der Schwingung $\mathfrak{E}_z$ vorzunehmen ist, und zu welchen Resultaten sie führt, wird unten im § 180 gezeigt werden.

Wir wollen das Zeitintervall T so groß wählen, daß nicht nur $\nu_0 T$, sondern auch $\sigma\nu_0 T$ durch eine große Zahl ausgedrückt wird, und wollen im folgenden immer nur solche zwischen 0 und T gelegene Zeiten t betrachten, für welche $\sigma\nu_0 t$, und um so mehr $\nu_0 t$, große Werte hat. Diese Festsetzung gewährt nämlich den Vorteil, daß wir dann von dem Anfangszustand des Oszillators (für $t = 0$) ganz absehen können, weil derselbe sich zur Zeit t nur mit einem Gliede von der Größenordnung $e^{-\sigma\nu_0 t}$ geltend macht und daher dann keinen merklichen Einfluß auf den Zustand mehr ausübt.

Unter den gemachten Voraussetzungen ergibt sich für irgendeine erregende Schwingung $\mathfrak{E}_z$ als allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung (172), wie leicht durch Vergleich mit (174) zu verifizieren:

$$f(t) = \frac{3c^3}{16\pi^3}\int d\nu \cdot \frac{C_\nu}{\nu^3} \cdot \sin\gamma_\nu \cdot \cos(2\pi\nu t - \vartheta_\nu - \gamma_\nu), \tag{279}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\operatorname{ctg}\gamma_\nu = \frac{\pi\nu_0(\nu_0^2 - \nu^2)}{\sigma\nu^3}. \tag{280}$$

Um γ_ν eindeutig zu machen, wollen wir noch festsetzen, daß γ_ν zwischen 0 und π liegt.

Da σ klein ist, so weicht $\frac{\sin\gamma_\nu}{\nu^3}$ nur dann merklich von Null ab, wenn ν/ν_0 nahezu $= 1$, d. h. es tragen nur diejenigen Glieder des FOURIERschen Integrals merklich zur Resonanzerregung bei, deren Index ν der Eigenschwingung ν_0 des Oszillators nahe liegt. Man kann daher in vielen Fällen hinter dem Integralzeichen ν durch ν_0 ersetzen, wovon wir im folgenden öfters Gebrauch machen werden.

§ 176. Die „Intensität der erregenden Schwingung“[1] J als Funktion der Zeit t definieren wir als den Mittelwert von $\mathfrak{E}_x^2$ in dem Zeitintervall von t bis $t+\tau$, wobei τ möglichst klein genommen ist gegen die Zeit T, aber immer noch groß gegen die Zeit $1/\nu_0$, d. h. gegen die Zeitdauer einer Eigenschwingung des Oszillators. In dieser Festsetzung liegt eine gewisse Unbestimmtheit, welche bewirkt, daß im allgemeinen J nicht nur von t, sondern auch von τ abhängig bleiben wird. Wenn dies der Fall ist, kann man von einer Intensität der erregenden Schwingung überhaupt nicht reden; denn es gehört mit zum Begriff der Schwingungsintensität, daß ihr Betrag sich innerhalb der Zeitdauer einer einzelnen Schwingung nur unmerklich ändert (vgl. oben § 3). Daher wollen wir künftig nur solche Vorgänge in Betracht ziehen, bei denen unter den angegebenen Bedingungen ein nur von t abhängiger Mittelwert von $\mathfrak{E}_x^2$ existiert. Die später vorzunehmende weitere Beschränkung auf den Fall der „natürlichen Strahlung“ wird zugleich auch die Erfüllung der hier als notwendig erkannten Bedingung enthalten. Um ihr in mathematischer Hinsicht zu genügen, wollen wir zunächst annehmen, daß die Größen C_ν in (278) für alle diejenigen Werte von ν unmerklich klein sind, welche gegen ν_0 verschwinden, oder, anders ausgedrückt, daß in der erregenden Schwingung $\mathfrak{E}_x$ keine ganz langsamen Perioden von merklicher Amplitude enthalten sind.

Zur Berechnung von J bilden wir nun aus (278) den Wert von $\mathfrak{E}_x^2$ und bestimmen den Mittelwert $\overline{\mathfrak{E}_x^2}$ dieser Größe durch Integration nach t von t bis $t+\tau$, Division durch τ und Übergang

[1] nicht zu verwechseln mit der „Feldintensität“ (Feldstärke) $\mathfrak{E}_x$ der erregenden Schwingung.

zur Grenze durch gehörige Verkleinerung von τ. Es ergibt sich so zunächst:

$$\mathfrak{E}_x^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \cos(2\pi\nu' t - \vartheta_{\nu'}) \cos(2\pi\nu t - \vartheta_\nu).$$

Vertauscht man die Werte von ν und ν', so ändert sich die Funktion unter dem Integralzeichen nicht; daher setzen wir fest:

$$\nu' > \nu$$

und schreiben:

$$\mathfrak{E}_x^2 = 2\iint d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \cos(2\pi\nu' t - \vartheta_{\nu'}) \cos(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)$$

oder:

$$\mathfrak{E}_x^2 = \iint d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \{\cos[2\pi(\nu' - \nu)t - \vartheta_{\nu'} + \vartheta_\nu] + \cos[2\pi(\nu' + \nu)t - \vartheta_{\nu'} - \vartheta_\nu]\}.$$

Folglich:

$$J = \overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \mathfrak{E}_x^2 dt$$

$$= \iint d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \left\{\frac{\sin\pi(\nu' - \nu)\tau \cdot \cos[\pi(\nu' - \nu)(2t + \tau) - \vartheta_{\nu'} + \vartheta_\nu]}{\pi(\nu' - \nu)\tau} + \frac{\sin\pi(\nu' + \nu)\tau \cdot \cos[\pi(\nu' + \nu)(2t + \tau) - \vartheta_{\nu'} - \vartheta_\nu]}{\pi(\nu' + \nu)\tau}\right\}.$$

Da nach der oben gemachten Voraussetzung alle diejenigen C_ν unmerklich klein sind, für welche ν gegen ν_0 verschwindet, so kann man in dem vorstehenden Ausdruck ν, und um so mehr ν', als von gleicher oder höherer Größenordnung wie ν_0 annehmen. Lassen wir nun τ immer kleiner werden, so ist vermöge der Bedingung, daß $\nu_0\tau$ groß bleibt, der Nenner $(\nu' + \nu)\tau$ des zweiten Bruches jedenfalls groß, während der des ersten Bruches, $(\nu' - \nu)\tau$, mit abnehmendem τ unter jeden endlichen Betrag herabsinken kann. Daher reduziert sich das Integral für genügend kleine Werte von $\nu' - \nu$ auf:

$$\iint d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \cos[2\pi(\nu' - \nu)t - \vartheta_{\nu'} + \vartheta_\nu],$$

also in der Tat unabhängig von τ. Die übrigen Glieder des Doppelintegrals, welche größeren Werten von $\nu' - \nu$, d. h. schnelleren Änderungen mit der Zeit entsprechen, hängen im

allgemeinen von τ ab und müssen daher verschwinden, wenn die Intensität J nicht von τ abhängen soll. Daher ist in unserem Falle, wenn man noch

$$\mu = \nu' - \nu (> 0)$$

als zweite Integrationsvariable statt ν' einführt:

$$J = \iint d\mu\, d\nu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \cos(2\pi\mu t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu) \tag{281}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} J &= \int d\mu\, (A_\mu \sin 2\pi\mu t + B_\mu \cos 2\pi\mu t), \\ \text{wobei:} \\ A_\mu &= \int d\nu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu) \\ B_\mu &= \int d\nu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu). \end{aligned}\right\} \tag{282}$$

Hierdurch ist die Intensität J der erregenden Schwingung, falls sie überhaupt existiert, als Funktion der Zeit t in der Form eines Fourierschen Integrals dargestellt.

§ 177. Schon in dem Begriff der Schwingungsintensität J liegt die Voraussetzung enthalten, daß diese Größe mit der Zeit t viel langsamer variiert als die Schwingung $\mathfrak{E}_z$ selber. Dasselbe folgt aus der Berechnung von J im vorigen Paragraphen. Denn dort ist für alle in Betracht kommenden Wertenpaare von C_ν und $C_{\nu'}$ $\nu\tau$ und $\nu'\tau$ groß, dagegen $(\nu' - \nu)\tau$ klein; folglich a fortiori

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{\mu}{\nu}\,\text{klein}, \tag{283}$$

und demgemäß sind die Fourierschen Integrale $\mathfrak{E}_z$ in (278) und J in (282) in ganz verschiedener Weise mit der Zeit veränderlich. Wir werden daher im folgenden in bezug auf die Abhängigkeit von der Zeit zwei verschiedenartig veränderliche Arten von Größen zu unterscheiden haben: schnell veränderliche Größen, wie $\mathfrak{E}_z$ und das mit $\mathfrak{E}_z$ durch die Differentialgleichung (172) verbundene f, und langsam veränderliche Größen, wie J und ebenso auch U, die Energie des Oszillators, deren Wert wir im nächsten Paragraphen berechnen wollen. Doch ist dieser Unterschied in der zeitlichen Veränderlichkeit der genannten Größen nur ein relativer, da der absolute Wert des Differentialquotienten von J nach der Zeit von der Größe der Zeiteinheit abhängt und

durch geeignete Wahl derselben beliebig groß gemacht werden kann. Man ist daher nicht berechtigt, $J(t)$ oder $U(t)$ schlechthin als langsam veränderliche Funktionen von t zu bezeichnen. Wenn wir diese Ausdrucksweise der Kürze halber in der Folge dennoch anwenden, so geschieht das stets im relativen Sinne, nämlich mit Bezug auf das abweichende Verhalten der Funktionen $\mathfrak{E}_z(t)$ oder $f(t)$.

Was nun aber die Abhängigkeit der Phasenkonstante ϑ_ν von ihrem Index ν anbetrifft, so besitzt diese notwendig die Eigenschaft der schnellen Veränderlichkeit im absoluten Sinne. Denn obwohl μ klein ist gegen ν, ist doch die Differenz $\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu$ im allgemeinen nicht klein, weil sonst die Größen A_μ und B_μ in (282) zu spezielle Werte erhalten würden, und daraus folgt, daß $(\partial \vartheta_\nu / \partial \nu) \cdot \nu$ durch eine große Zahl dargestellt wird. Hieran ändert auch ein Wechsel der Zeiteinheit oder eine Verlegung des Anfangspunktes der Zeit nichts Wesentliches.

Die schnelle Veränderlichkeit der Größen ϑ_ν und ebenso C_ν mit ν ist also eine im absoluten Sinne notwendige Bedingung für die Existenz einer bestimmten Schwingungsintensität J, oder mit anderen Worten: für die Möglichkeit der Einteilung der von der Zeit abhängigen Größen in schnell veränderliche und in langsam veränderliche — einer Einteilung, die auch in anderen physikalischen Theorien häufig gemacht wird und auf welche sich alle folgenden Untersuchungen gründen.

§ 178. Die im vorstehenden eingeführte Unterscheidung zwischen schnell veränderlichen und langsam veränderlichen Größen ist in physikalischer Beziehung hier deshalb wichtig, weil wir im folgenden nur die langsame Abhängigkeit von der Zeit als direkt meßbar annehmen wollen. Damit nähern wir uns eben den in der Optik und in der Wärmestrahlung tatsächlich stattfindenden Verhältnissen. Unsere Aufgabe wird dann darin bestehen, Beziehungen ausschließlich zwischen langsam veränderlichen Größen aufzustellen; denn diese allein sind es, welche mit den Ergebnissen der Erfahrung verglichen werden können. Wir bestimmen daher nun zunächst die Werte der wichtigsten hier in Betracht kommenden langsam veränderlichen Größen, nämlich die Energie des Oszillators und den Betrag der vom Oszillator emittierten und absorbierten Energie.

Die Energie des Oszillators, die in (142) ausgedrückt ist, besteht aus zwei Teilen: der potentiellen Energie und der kinetischen Energie. Da wegen der kleinen Dämpfung der Mittelwert dieser beiden Energiearten jedenfalls der nämliche ist, d. h.

$$K\overline{f^2} = L\overline{\left(\frac{df}{dt}\right)^2}, \tag{284}$$

wie sich übrigens auch direkt aus (168) und (279) ableiten läßt, so können wir auch schreiben:

$$U = K\overline{f^2}, \tag{285}$$

indem wir mit $\overline{f^2}$ den Mittelwert von f^2 in dem Zeitintervall von t bis $t+\tau$ bezeichnen. Dieser Mittelwert berechnet sich nach (279) genau in der nämlichen Weise wie der von $\mathfrak{E}_x^2$ in § 176, nur daß hier $\frac{3c^3 C_\nu \sin\gamma_\nu}{16\pi^3\nu^3}$ statt C_ν, und $\vartheta_\nu + \gamma_\nu$ statt ϑ_ν zu setzen ist. Wir erhalten daher analog (281) mit Rücksicht auf den Wert von K in (168):

$$\left.\begin{aligned} U = \frac{3c^3}{16\pi^2\sigma}\iint d\mu\, d\nu\; C_{\nu+\mu}\, C_\nu \frac{\sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu}{\nu^3} \times \\ \cos(2\pi\mu t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu - \gamma_{\nu+\mu} + \gamma_\nu). \end{aligned}\right\} \tag{286}$$

Hierbei ist davon Gebrauch gemacht, daß μ kein ist gegen ν, und daß in dem Integral nur diejenigen Glieder merklich in Betracht kommen, für welche ν nahe gleich ν_0.

Statt dessen kann man schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &U = \int d\mu\,(a_\mu \sin 2\pi\mu t + b_\mu \cos 2\pi\mu t), \\ &\text{wobei:} \\ &a_\mu = \frac{3c^3}{16\pi^2\sigma}\int d\nu\; C_{\nu+\mu}\, C_\nu \frac{\sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu}{\nu^3}\sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu + \gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu), \\ &b_\mu = \frac{3c^3}{16\pi^2\sigma}\int d\nu\; C_{\nu+\mu}\, C_\nu \frac{\sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu}{\nu^3}\cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu + \gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu). \end{aligned}\right\} \tag{287}$$

Ebenso wie C_ν und ϑ_ν, so ist auch γ_ν, wie man aus (280) erkennt, im absoluten Sinne schnell veränderlich mit ν. Man darf daher, obwohl μ klein ist gegen ν, den Winkel $\gamma_{\nu+\mu}$ nicht etwa annähernd gleich γ_ν setzen, nämlich dann nicht, wenn μ von gleicher oder sogar höherer Größenordnung ist, wie $\sigma\nu_0$.

§ 179. Der Betrag der vom Oszillator in der Zeit dt emittierten Energie, als einer „langsam veränderlichen" Größe, ergibt sich aus der Gleichung (151) zu:

$$\frac{2}{3c^3}\overline{\dot{f}^2(t)}\cdot dt$$

oder nach (279), durch Bildung des Mittelwertes in derselben Weise wie oben:

$$= \frac{3c^3 dt}{8\pi^3}\iint d\nu\, d\mu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \frac{\sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu}{\nu^2}$$
$$\cos(2\pi\mu t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu - \gamma_{\nu+\mu} + \gamma_\nu),$$

also durch Vergleich mit (286):

$$= 2\sigma\nu_0 U dt. \tag{288}$$

Die in einem Zeitelement vom Oszillator emittierte Energie ist proportional der Energie des Oszillators, ferner seiner Schwingungszahl und seinem logarithmischen Dekrement.

Der Betrag der vom Oszillator in der Zeit dt absorbierten Energie, als einer „langsam veränderlichen" Größe, läßt sich entweder aus (170) berechnen durch die Bildung des Mittelwertes von $\mathfrak{E}_z\left(\frac{df}{dt}\right)$ mit Hilfe der bekannten Ausdrücke für $\mathfrak{E}_z$ und f, oder auch direkt aus einer Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie, welche besagt, daß die im Zeitelement dt vom Oszillator absorbierte Energie gleich ist der Summe der in dem Zeitelement erfolgten Energiezunahme und der emittierten Energie:

$$\overline{\mathfrak{E}_z \dot{f}}\, dt = dU + 2\sigma\nu_0 U dt. \tag{289}$$

Setzt man hierin für U den in (287) gegebenen Wert, so ergibt sich für die in der Zeit dt vom Oszillator absorbierte Energie der Wert:

$$\left\{\begin{array}{l} dt\cdot\int d\mu\,(a_\mu'\sin 2\pi\mu t + b_\mu'\cos 2\pi\mu t), \\ \text{wobei:} \\ \qquad a_\mu' = 2\sigma\nu_0 a_\mu - 2\pi\mu b_\mu, \\ \qquad b_\mu' = 2\sigma\nu_0 b_\mu + 2\pi\mu a_\mu. \end{array}\right. \tag{290}$$

Diese Größen wollen wir nun mit der Intensität der erregenden Schwingung in eine allgemeine Beziehung bringen, wobei immer festzuhalten ist, daß das Verhältnis $\mu : \sigma \nu_0$ beliebig große und kleine Werte annehmen kann.

§ 180. Von den bisher in unseren Gleichungen auftretenden Energiegrößen dürfen wir als direkt meßbar ansehen nur die Intensität J der erregenden Schwingung und die Energie U des Oszillators. Dieselben stehen aber im allgemeinen in keinem einfachen Zusammenhang miteinander, da die Energie des Oszillators nicht allein von der Gesamtintensität J der erregenden Schwingung $\mathfrak{E}_s$, sondern noch von spezielleren Eigentümlichkeiten, nämlich von den spektralen Eigenschaften dieser Schwingung abhängt. Man kann nun offenbar die Eigenschaften einer bestimmten erregenden Schwingung dadurch weiter verfolgen, daß man die zu untersuchende Schwingung auf verschiedene Resonatoren wirken läßt und die Energie mißt, welche ein jeder Resonator einzeln unter dem Einfluß derselben erregenden Schwingung annimmt. Es ist dies ganz die nämliche Methode, welche in der Akustik zur Analyse eines Klanges angewendet wird.

Hierauf gründen wir unsere Definition der in der Gesamtintensität J enthaltenen Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ einer bestimmten Schwingungszahl ν. Wir setzen nämlich:

$$J = \int_0^\infty \mathfrak{J}_\nu \, d\nu \tag{291}$$

und definieren $\mathfrak{J}_\nu$, eine „langsam veränderliche" Funktion der beiden Variabeln ν und t, durch die Energie, welche ein Resonator mit der Schwingungszahl ν unter dem Einfluß der erregenden Schwingung $\mathfrak{E}_s$ annimmt. Den Resonator nehmen wir der Einfachheit halber von der gleichen Beschaffenheit an wie den bis jetzt betrachteten Oszillator.

Doch ist hier noch ein wichtiger Punkt zu erledigen. Da nämlich die Energie eines von der Schwingung $\mathfrak{E}_s$ erregten Resonators nicht allein von seiner Eigenschwingung, sondern außerdem auch von seiner Dämpfung abhängt, so ist noch auf eine geeignete Wahl der Dämpfungskonstanten des zur Messung der Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ benutzten Resonators Rücksicht zu nehmen. Damit der Resonator auf eine bestimmte Schwingungszahl und

nicht etwa auf ein endliches Intervall von Schwingungszahlen merklich reagiert, muß sein Dämpfungsdekrement klein sein. Es darf aber auch andererseits nicht allzu klein genommen werden; denn ein Resonator mit sehr kleiner Dämpfung braucht sehr lange Zeit zum Abklingen, und ein solcher Resonator würde den Zweck, durch sein Mitschwingen jederzeit eine gleichzeitige Eigenschaft der ihn erregenden, im allgemeinen mit der Zeit veränderlichen Schwingung anzugeben, nicht erfüllen, da seine Energie nicht von der gleichzeitigen Beschaffenheit, sondern zugleich auch von der Vorgeschichte der erregenden Schwingung abhängen würde. Die Energie des Resonators würde also nicht die Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ selber, sondern einen gewissen, über einen größeren Zeitraum erstreckten Mittelwert dieser Größe zum Ausdruck bringen.

Um diesen Umstand zu berücksichtigen, wählen wir das logarithmische Dekrement ϱ aller zur Analyse der erregenden Schwingung $\mathfrak{E}_s$ benutzten Resonatoren zwar klein gegen 1, machen aber doch $\varrho\,\nu$ groß gegen alle μ, was stets möglich ist, da nach (283) μ klein ist gegen ν. Dann ist der Zustand eines analysierenden Resonators, z. B. desjenigen mit der Schwingungszahl ν_0, vollständig bestimmt durch die gleichzeitige Beschaffenheit der erregenden Schwingung, und man kann sagen, daß der Resonator alle Intensitätsschwankungen der erregenden Schwingung momentan anzeigt. In der Tat ersieht man z. B. leicht aus (290), wenn man darin ϱ statt σ setzt, daß die Glieder mit dem Faktor μ gegen die Glieder mit dem Faktor $\varrho\,\nu_0$ verschwinden und daß dadurch die vom Resonator absorbierte Energie proportional wird seiner augenblicklichen Energie U, was nur dann möglich ist, wenn der Zustand des Resonators nur von der gleichzeitigen Beschaffenheit der erregenden Schwingung abhängt.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist die in der Gesamtintensität J der erregenden Schwingung enthaltene Intensität der Schwingungszahl ν_0, die wir kurz mit $\mathfrak{J}_0$ bezeichnen wollen, nach (286) als Funktion der Zeit gegeben durch:

$$\mathfrak{J}_0 = \varkappa_0 \cdot \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\varrho} \iint d\mu\, d\nu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \frac{\sin^2 \delta_\nu}{\nu^3} \times \cos\left(2\,\pi\,\mu\,t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu\right).$$

Hier ist $\varkappa_0$ ein von ν_0 abhängiger, sogleich zu bestimmender Proportionalitätsfaktor; der Winkel δ_ν geht aus γ_ν in (280) hervor, wenn man darin ϱ statt σ setzt, also:

$$\operatorname{ctg} \delta_\nu = \frac{\pi \nu_0 (\nu_0^2 - \nu^2)}{\varrho \nu^3} \tag{292}$$

und $\delta_{\nu+\mu}$ ist $= \delta_\nu$ gesetzt, da μ klein ist gegen $\varrho \nu_0$. Der Proportionalitätsfaktor $\varkappa_0$ bestimmt sich aus der Bedingung (291). Schreibt man nämlich diese Bedingung nach (281) in der Form:

$$\iint d\mu \, d\nu \; C_{\nu+\mu} \, C_\nu \cos(2\pi\mu t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu) = \int_0^\infty \mathfrak{I}_0 \, d\nu_0 ,$$

so folgt aus dem soeben für $\mathfrak{I}_0$ gefundenen Ausdruck, da μ und ν nicht von ν_0 abhängen:

$$1 = \int_0^\infty d\nu_0 \cdot \frac{3 c^3 \varkappa_0}{16 \pi^2 \varrho \nu^3} \cdot \sin^2 \delta_\nu ,$$

oder nach (292):

$$\frac{16 \pi^2 \nu^3}{3 c^3} = \int_0^\infty d\nu_0 \cdot \frac{\varkappa_0}{\varrho} \cdot \frac{1}{1 + \pi^2 \dfrac{\nu_0^2 (\nu_0^2 - \nu^2)^2}{\varrho^2 \nu^6}} .$$

Da nun ϱ klein ist gegen 1, so braucht man nur diejenigen Werte der Funktion unter dem Integralzeichen zu berücksichtigen, für welche ν_0 nahe $= \nu$ ist, und erhält so ganz ähnlich wie in § 122:

$$\frac{16 \pi^2 \nu^3}{3 c^3} = \int_0^\infty d\nu_0 \cdot \frac{\varkappa_0}{\varrho} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{4 \pi^2 (\nu_0 - \nu)^2}{\varrho^2 \nu^2}} = \frac{\varkappa \nu}{2} ,$$

wenn $\varkappa$ den Wert von $\varkappa_0$ für $\nu_0 = \nu$ bedeutet. Daraus ergibt sich:

$$\varkappa_0 = \frac{32 \pi^2 \nu_0^2}{3 c^3} .$$

Daher ist die Intensität $\mathfrak{I}_0$ der Schwingungszahl ν_0:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{I}_0 &= \int d\mu \, (\mathfrak{A}_\mu^0 \sin 2\pi\mu t + \mathfrak{B}_\mu^0 \cos 2\pi\mu t), \\ \text{wobei:} \\ \mathfrak{A}_\mu^0 &= \frac{2\nu_0^2}{\varrho} \int d\nu \; C_{\nu+\mu} \, C_\nu \frac{\sin^2 \delta_\nu}{\nu^3} \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu), \\ \mathfrak{B}_\mu^0 &= \frac{2\nu_0^2}{\varrho} \int d\nu \; C_{\nu+\mu} \, C_\nu \frac{\sin^2 \delta_\nu}{\nu^3} \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu). \end{aligned}\right\} \tag{293}$$

Im allgemeinen werden die Werte von $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ noch von ϱ abhängig sein. In diesem Falle kann man von einer Intensität der Schwingungszahl ν_0 in bestimmtem Sinne gar nicht reden. Wir wollen nun für das Folgende die Voraussetzung machen, daß eine jede Schwingungszahl ν eine ganz bestimmte, mit der Zeit „langsam veränderliche" Schwingungsintensität $\mathfrak{J}_\nu$ besitzt, unabhängig von der zu ihrer Messung dienenden Größe ϱ. Dann ist zugleich auch die schon in § 176 eingeführte Bedingung erfüllt, daß eine Gesamtintensität

$$J = \int_0^\infty \mathfrak{J}_\nu \, d\nu$$

der erregenden Schwingung $\mathfrak{E}_z$ existiert. Auf die Frage, weshalb und inwieweit diese Annahme, welche übrigens in der Wärme- und Lichtstrahlung bisher tatsächlich stets gemacht wurde, in der Natur gerechtfertigt ist, soll hier nicht näher eingegangen werden.

§ 181. Wir haben jetzt die erregende Schwingung $\mathfrak{E}_z$, die zu den „schnell veränderlichen" und daher nicht direkt meßbaren Größen gehört, so weit analysiert, daß wir ihre Gesamtintensität J zu jeder Zeit in eine Reihe von meßbaren Größen zerlegt haben: den Intensitäten $\mathfrak{J}_\nu$ der verschiedenen Schwingungszahlen ν. Weitere Mittel, um „langsam veränderliche" Eigenschaften von $\mathfrak{E}_z$ abzuleiten, besitzen wir nicht; die Methoden der Analyse sind also hiermit erschöpft. Was wir durch sie von der schnell veränderlichen Schwingung $\mathfrak{E}_z$ kennen gelernt haben, ist aber im Vergleich zu der in ihr noch enthaltenen Mannigfaltigkeit von Eigenschaften nur äußerst wenig. Die Funktionen C_ν und ϑ_ν selber, in ihrer Abhängigkeit von ν, sind und bleiben uns innerhalb eines breiten Spielraumes gänzlich unbekannt.

Stellen wir nun zunächst dasjenige zusammen, was wir durch Messung der Intensität $\mathfrak{J}_0$ der Schwingungszahl ν_0, als einer langsam veränderlichen Funktion der Zeit t, über die schnell veränderlichen Größen C_ν und ϑ_ν erfahren können. Als meßbar haben wir in (293) die Größen $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ zu betrachten, für alle Werte von μ. Setzen wir nun:

$$(294) \qquad \begin{cases} C_{\nu+\mu} C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu) = \mathfrak{A}_\mu^0 + \xi, \\ C_{\nu+\mu} C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu) = \mathfrak{B}_\mu^0 + \eta, \end{cases}$$

wobei ξ und η schnell veränderliche Funktionen von ν und μ sind, so folgt aus (293):

$$\mathfrak{A}_\mu^0 = \mathfrak{A}_\mu^0 \cdot \frac{2\nu_0^2}{\varrho} \cdot \int d\nu \frac{\sin^2 \delta_\nu}{\nu^3} + \frac{2\nu_0^2}{\varrho} \int \xi \frac{\sin^2 \delta_\nu}{\nu^3} d\nu .$$

Nun ist mit Rücksicht auf (292):

$$\frac{2\nu_0^2}{\varrho} \int \frac{\sin^2 \delta_\nu}{\nu^3} d\nu = 1 .$$

Folglich:

$$\int \xi \frac{\sin^2 \delta_\nu}{\nu^3} d\nu = 0 .$$

Ebenso:

$$\int \eta \frac{\sin^2 \delta_\nu}{\nu^3} d\nu = 0 .$$

Da $\frac{\sin \delta_\nu}{\nu}$ für alle Werte von ν verschwindet, deren Verhältnis zu ν_0 nicht nahe gleich 1 ist, so stellt die Größe $\mathfrak{A}_\mu^0$ in (294) den langsam veränderlichen Mittelwert der schnell veränderlichen Größe $C_{\nu+\mu} C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ für ν nahe gleich ν_0 vor, und ebenso $\mathfrak{B}_\mu^0$ den entsprechenden Mittelwert der schnell veränderlichen Größe $C_{\nu+\mu} C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$.[1]

Kehren wir nun zu der Untersuchung des Oszillators mit der Schwingungszahl ν_0 und dem Dämpfungsdekrement σ zurück, so ist zunächst von vornherein einleuchtend, daß zur Berechnung des Einflusses, welchen die erregende Schwingung $\mathfrak{E}_z$ auf den Oszillator ausübt, die Kenntnis der Mittelwerte $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ im allgemeinen noch nicht genügt, sondern daß dazu die Größen C_ν und ϑ_ν selber bekannt sein müssen. In der Tat ersieht man aus dem in (287) abgeleiteten Ausdruck der Energie U des Oszillators, daß diese erst dann genau berechnet werden kann, wenn man die Werte von $C_{\nu+\mu} C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ und von $C_{\nu+\mu} C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ für jeden Wert von ν anzugeben vermag, für den $\nu : \nu_0$ nahe gleich 1 ist. Mit anderen Worten: die

[1] Man könnte auch sehr viel einfacher die Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ einer bestimmten Schwingungszahl ν durch die genannten Mittelwerte definieren, indem man das für die Gesamtintensität J aufgestellte Integral (281) einfach in der Form der Gleichung (291) schreibt und daraus die Werte $\mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{B}_\mu$ ableitet. Dann geht aber die hier benutzte physikalische Bedeutung der Definition verloren.

in der erregenden Schwingung enthaltene Intensität $\mathfrak{J}_0$ der Schwingungszahl ν_0, auch wenn sie für alle Zeiten bekannt ist, bestimmt im allgemeinen noch nicht die Energie U des von der Schwingung getroffenen Oszillators.

Somit bleibt nichts anderes übrig, als entweder auf die Konstatierung eines allgemeinen Zusammenhangs der Größen U und $\mathfrak{J}_0$ überhaupt zu verzichten, was aber den Ergebnissen aller Erfahrung zuwiderlaufen würde, oder mittels einer neu einzuführenden Hypothese die vorhandene Kluft zu überbrücken. Die physikalischen Tatsachen entscheiden für die zweite Alternative.

Die Hypothese, welche wir jetzt als die nächstliegende und wohl einzig mögliche einführen und für alles folgende beibehalten wollen, besteht in der Annahme, daß bei der Berechnung von U aus der Gleichung (287) in den Integralen, welche die Werte der Koeffizienten a_μ und b_μ angeben, für die schnell veränderlichen Größen $C_{\nu+\mu} C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ und $C_{\nu+\mu} C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ — die einzigen von C_ν und ϑ_ν abhängigen Größen, die in diesen Integralen vorkommen — ohne merklichen Fehler ihre langsam veränderlichen Mittelwerte $\mathfrak{A}^0_\mu$ und $\mathfrak{B}^0_\mu$ gesetzt werden können. Damit erhält dann die Aufgabe, U aus $\mathfrak{J}_0$ zu berechnen, eine ganz bestimmte, durch Messungen zu verifizierende Lösung. Um aber auszudrücken, daß die hier abzuleitenden Gesetze nicht für jede Art Schwingungen, sondern nur mit Ausschließung gewisser besonderer Einzelfälle gelten, wollen wir jede Art Strahlung, auf welche die hier eingeführte Hypothese paßt, als „natürliche" Strahlung bezeichnen. Dieser Name empfiehlt sich deshalb, weil, wie sich im nächsten Kapitel zeigen wird, der so charakterisierten Strahlung gerade die Eigenschaften der Wärmestrahlung zukommen.

Man kann den Begriff der natürlichen Strahlung noch anschaulicher, aber weniger direkt, als oben geschehen, auch dahin fassen, daß bei ihr die Abweichungen der unmeßbaren schnell veränderlichen Größen $C_{\nu+\mu} C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ usw. von ihren meßbaren langsam veränderlichen Mittelwerten $\mathfrak{A}^0_\mu$ usw. gänzlich unregelmäßig sind, entsprechend der „elementaren Unordnung" (§ 132).

§ 182. Gemäß der im vorigen Paragraphen eingeführten Hypothese ergibt sich aus der Gleichung (287):

$$a_\mu = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\sigma}\int d\nu\,\frac{\sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu}{\nu^3}\cdot$$
$$\left(\mathfrak{A}_\mu^0\cos(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu)+\mathfrak{B}_\mu^0\sin(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu)\right),$$

$$b_\mu = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\sigma}\int d\nu\,\frac{\sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu}{\nu^3}\cdot$$
$$\left(\mathfrak{B}_\mu^0\cos(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu)-\mathfrak{A}_\mu^0\sin(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu)\right),$$

oder:

$$a_\mu = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\sigma}(\mathfrak{A}_\mu^0\,\alpha+\mathfrak{B}_\mu^0\,\beta),$$

$$b_\mu = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\sigma}(\mathfrak{B}_\mu^0\,\alpha-\mathfrak{A}_\mu^0\,\beta),$$

wobei:

$$\alpha = \int_0^\infty d\nu\,\frac{\sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu}{\nu^3}\cos(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu),$$

$$\beta = \int_0^\infty d\nu\,\frac{\sin\gamma_{\nu+\mu}\sin\gamma_\nu}{\nu^3}\sin(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu).$$

Nun ergibt sich mit Berücksichtigung der in (280) gegebenen Werte von $\operatorname{ctg}\gamma_\nu$ und $\operatorname{ctg}\gamma_{\nu+\mu}$ durch elementare Rechnungen, wobei besonders zu beachten ist, daß σ klein ist und daß μ im allgemeinen von derselben Größenordnung ist wie $\sigma\nu_0$:

$$\alpha = \frac{\sigma}{2\nu_0^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2\mu^2}{\sigma^2\nu_0^2}},$$

$$\beta = \frac{\pi\mu}{2\nu_0^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2\mu^2}{\sigma^2\nu_0^2}}.$$

Folglich, wenn man daraus a_μ und b_μ berechnet und die so erhaltenen Werte in (290) einsetzt:

$$a_\mu' = \frac{3\,c^3\,\sigma}{16\,\pi^2\,\nu_0}\,\mathfrak{A}_\mu^0,$$

$$b_\mu' = \frac{3\,c^3\,\sigma}{16\,\pi^2\,\nu_0}\,\mathfrak{B}_\mu^0.$$

Die in der Zeit dt vom Oszillator absorbierte Energie ist also nach (290):

$$dt \cdot \frac{3c^3\sigma}{16\pi^2\nu_0} \cdot \int d\mu \,(\mathfrak{A}_\mu^0 \sin 2\pi\mu t + \mathfrak{B}_\mu^0 \cos 2\pi\mu t),$$

oder nach (293):

$$= dt \cdot \frac{3c^3\sigma}{16\pi^2\nu_0} \cdot \mathfrak{J}_0 . \tag{295}$$

Die in einem Zeitelement vom Oszillator absorbierte Energie ist proportional der in der erregenden Schwingung enthaltenen Intensität seiner Eigenperiode, ferner seinem logarithmischen Dekrement und dem Kubus der Lichtgeschwindigkeit, und umgekehrt proportional der Schwingungszahl.

Bei der natürlichen Strahlung wird also stets positive Energie absorbiert, was im allgemeinen, wie schon in der § 111 gemachten Bemerkung betont wurde, nicht der Fall zu sein braucht.

Durch Substitution des Wertes der absorbierten Energie in (289) erhält man schließlich die Fundamentalgleichung der entwickelten Theorie:

$$dt \cdot \frac{3c^3\sigma}{16\pi^2\nu_0} \cdot \mathfrak{J}_0 = dU + 2\sigma\nu_0 U dt$$

oder:

$$\frac{dU}{dt} + 2\sigma\nu_0 U = \frac{3c^3\sigma}{16\pi^2\nu_0}\mathfrak{J}_0 . \tag{296}$$

Diese Differentialgleichung kann zur Berechnung der Energie U des Oszillators benutzt werden, wenn die seiner Schwingungszahl ν_0 entsprechende Intensität $\mathfrak{J}_0$ der erregenden Schwingung als Funktion der Zeit gegeben ist. Da die Funktionen $U(t)$ und $\mathfrak{J}_0(t)$ hier nicht mehr durch Fourriersche Integrale dargestellt zu werden brauchen, so können wir von jetzt ab auch die früher in § 175 eingeführte Beschränkung in bezug auf das betrachtete Zeitintervall wieder aufheben, und diese und die folgenden Gleichungen als für alle positiven und negativen Zeiten gültig ansehen.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (296) ist:

$$U = \frac{3c^3\sigma}{16\pi^2\nu_0} \int_{-\infty}^{t} \mathfrak{J}_0(x)\, e^{2\sigma\nu_0(x-t)}\, dx .$$

Für konstantes $\mathfrak{J}_0$ hat man:

$$U = \frac{3c^3}{16\pi^2\nu_0^2}\mathfrak{J}_0 .$$

Bei konstanter Bestrahlung ist die Energie des Oszillators proportional der in der erregenden Schwingung enthaltenen Intensität seiner Schwingungszahl, ferner dem Kubus der Lichtgeschwindigkeit, und umgekehrt proportional dem Quadrat der Schwingungszahl, aber unabhängig von der Dämpfung.

Nachdem wir so die Abhängigkeit der Energie des Oszillators von der Intensität der erregenden Schwingung festgestellt haben, wird es unsere nächste Aufgabe sein, die letztere Größe in Zusammenhang zu bringen mit der im umgebenden Felde stattfindenden Energiestrahlung. Dies geschieht nach bekannten Methoden im nächsten Abschnitt und führt zur Formulierung der Gesetze der Energie und der Entropie.

Drittes Kapitel.
Erhaltung der Energie und Vermehrung der Entropie.

§ 183. Indem wir jetzt zur Untersuchung der Vorgänge in dem den Oszillator umgebenden elektromagnetischen Felde übergehen, wollen wir überall im folgenden von den im vorigen Kapitel abgeleiteten Resultaten Gebrauch machen, selbstverständlich unter der Voraussetzung, daß dabei überall und zu allen Zeiten die Bedingungen der natürlichen Strahlung erfüllt sind. Dementsprechend brauchen wir künftig nie mehr mit Amplituden und Phasen zu rechnen, sondern stets nur mit Intensitäten und Energien, d. h. mit „langsam veränderlichen" (im Sinne des § 177) Größen. In diesem Sinne ist auch die Bedeutung der unten benutzten Raumelemente und Zeitelemente zu verstehen, nämlich als Größen, welche unendlich klein sind gegen die Dimensionen der betrachteten Räume und Zeiten, aber immer noch groß gegen die betrachteten Wellenlängen und Schwingungsdauern. Die Wände des durchstrahlten Vakuums denken wir uns als ruhende, absolut spiegelnde Flächen, deren Krümmungsradien groß sind gegen alle in Betracht kommenden Wellenlängen (§ 2).

Dann ist die totale Energie U_t des durchstrahlten Vakuums und einer darin in gehörigen Abständen voneinander befindlichen Anzahl von Oszillatoren der betrachteten Art von der Form:

$$U_t = \Sigma U + \int u \, d\tau, \tag{297}$$

wobei U die Energie eines einzelnen Oszillators, Σ die Summation über alle Oszillatoren, und u die Dichte der strahlenden Energie im Raumelement $d\tau$ des Vakuums bezeichnet. Da die Oszillatoren verschwindend kleine Räume einnehmen, so ist es gleichgültig, ob in dem Integral die Integration auch über die von den Oszillatoren erfüllten Räume erstreckt wird oder nicht.

Die räumliche Dichte u der elektromagnetischen Energie in einem Punkte des Vakuums ist:

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(\overline{\mathfrak{E}_x^2} + \overline{\mathfrak{E}_y^2} + \overline{\mathfrak{E}_z^2} + \overline{\mathfrak{H}_x^2} + \overline{\mathfrak{H}_y^2} + \overline{\mathfrak{H}_z^2}\right),$$

wo $\mathfrak{E}_x^2$, $\mathfrak{E}_y^2$, $\mathfrak{E}_z^2$, $\mathfrak{H}_x^2$, $\mathfrak{H}_y^2$, $\mathfrak{H}_z^2$ die Quadrate der Feldstärken bedeuten, als „langsam veränderliche" Größen (§ 177) betrachtet, und daher mit dem auf den Mittelwert deutenden Querstrich versehen. Da für jeden einzelnen Strahl die mittlere elektrische und magnetische Energie gleich sind, kann man immer schreiben:

$$u = \frac{1}{4\pi}\left(\overline{\mathfrak{E}_x^2} + \overline{\mathfrak{E}_y^2} + \overline{\mathfrak{E}_z^2}\right). \tag{298}$$

Nun wollen wir die Intensität $J = \overline{\mathfrak{E}_z^2}$ der einen Oszillator erregenden Schwingung (§ 176) aus den Intensitäten der den Oszillator von allen Seiten treffenden Wärmestrahlen berechnen.

Zu diesem Zweck müssen wir auch auf die Polarisation der den Oszillator treffenden monochromatischen Strahlen Rücksicht nehmen. Fassen wir also zunächst ein Strahlenbündel ins Auge, welches den Oszillator innerhalb eines Elementarkegels trifft, dessen Spitze im Oszillator liegt, und dessen Öffnung $d\Omega$ durch (5) gegeben ist, wobei die Polarwinkel ϑ und φ die Richtung der Fortpflanzung der Strahlen bezeichnen, so zerfällt das ganze Strahlenbündel in eine Reihe monochromatischer Bündel, von denen eines die Hauptwerte der Intensität $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ (§ 17) besitzen möge. Bezeichnen wir nun den Winkel, welchen die zur Hauptintensität $\mathfrak{K}$ gehörige Polarisationsebene mit der durch die Richtung des Strahles und die Z-Achse (die Oszillatorachse) gelegten Ebene bildet, mit ω, einerlei in welchem Quadranten, so läßt sich nach (8) die spezifische Intensität des monochromatischen Bündels zerlegen in die beiden geradlinig und senkrecht aufeinander polarisierten Komponenten:

$$\mathfrak{K}\cos^2\omega + \mathfrak{K}'\sin^2\omega,$$
$$\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega,$$

von denen die erste in der durch die Z-Achse gehenden Ebene polarisiert ist, da sie für $\omega = 0$ gleich $\mathfrak{R}$ wird. Diese Komponente liefert keinen Beitrag zu dem Werte von $\overline{\mathfrak{E}_z^2}$ im Oszillator, weil die elektrische Feldstärke eines geradlinig polarisierten Strahles senkrecht steht auf der Polarisationsebene. Es bleibt also nur übrig die zweite Komponente, deren elektrische Feldstärke den Winkel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ mit der Z-Achse bildet. Nun ist nach dem Poyntingschen Satze die Intensität eines geradlinig polarisierten Strahles im Vakuum gleich $\frac{c}{4\pi}$ mal dem mittleren Quadrat der elektrischen Feldstärke. Folglich ist das mittlere Quadrat der elektrischen Feldstärke des hier betrachteten Strahlenbündels:

$$\frac{4\pi}{c}(\mathfrak{R}\sin^2\omega + \mathfrak{R}'\cos^2\omega)\,d\nu\,d\Omega$$

und das mittlere Quadrat der Komponente davon in der Richtung der Z-Achse:

$$\frac{4\pi}{c}(\mathfrak{R}\sin^2\omega + \mathfrak{R}'\cos^2\omega)\sin^2\vartheta\,d\nu\,d\Omega\,. \qquad (299)$$

Durch Integration über alle Schwingungszahlen und alle Öffnungswinkel erhalten wir mithin den gesuchten Wert:

$$\overline{\mathfrak{E}_z^2} = \frac{4\pi}{c}\int\sin^2\vartheta\,d\Omega\int d\nu\,(\mathfrak{R}_\nu\sin^2\omega_\nu + \mathfrak{R}_\nu'\cos^2\omega_\nu) = J. \qquad (300)$$

Sind speziell alle Strahlen unpolarisiert und die Strahlungsintensität nach allen Richtungen konstant, so ist $\mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{R}_\nu'$ und, da:

$$\int\sin^2\vartheta\,d\Omega = \iint\sin^3\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{8\pi}{3}\,,$$

$$\overline{\mathfrak{E}_z^2} = \frac{32\pi^2}{3c}\int\mathfrak{R}_\nu\,d\nu = \overline{\mathfrak{E}_x^2} = \overline{\mathfrak{E}_y^2}$$

und durch Substitution in (298):

$$u = \frac{8\pi}{c}\int\mathfrak{R}_\nu\,d\nu\,,$$

übereinstimmend mit (22) und (24).

Nehmen wir nun nach § 180 die spektrale Zerlegung der Intensität J vor:

$$J = \int\mathfrak{J}_\nu\,d\nu\,,$$

so ergibt sich durch Vergleichung mit (300) für die in der

erregenden Schwingung enthaltene Intensität einer bestimmten Schwingungszahl ν der Wert:

$$(301) \qquad \mathfrak{J}_\nu = \frac{4\pi}{c} \int \sin^2 \vartheta \, d\Omega \, (\mathfrak{K}_\nu \sin^2 \omega_\nu + \mathfrak{K}_\nu' \cos^2 \omega_\nu).$$

Da nun $\mathfrak{J}$ mit der Energie U des Oszillators durch die Gleichung (296) zusammenhängt, so ist hiermit die Möglichkeit gegeben, die Schwingung des Oszillators zu berechnen, wenn die Intensitäten und Polarisationen aller den Oszillator treffenden Strahlen für alle Zeiten bekannt sind. Insbesondere ergibt sich für unpolarisierte und nach allen Richtungen gleichmäßige Strahlung:

$$\mathfrak{J} = \frac{32\pi^2}{3c} \mathfrak{K}$$

und nach (296):

$$\frac{dU}{dt} + 2\sigma\nu U = \frac{2c^2\sigma}{\nu} \mathfrak{K}.$$

Der Index 0 kann von jetzt an weggelassen werden. Ist die Strahlung auch noch unabhängig von der Zeit, oder der Strahlungszustand „stationär", so ist auch U von der Zeit unabhängig und:

$$302) \qquad U = \frac{c^2}{\nu^2} \mathfrak{K},$$

übereinstimmend mit Gleichung (193).

§ 184. Die ganze in der Zeit dt von dem Oszillator absorbierte Energie beträgt nach (295):

$$dt \cdot \frac{3c^2\sigma}{16\pi^2\nu} \cdot \mathfrak{J}$$

oder nach (301):

$$dt \cdot \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \int \sin^2 \vartheta \, d\Omega \, (\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega).$$

Daher wird von der in der Richtung (ϑ, φ) auf den Oszillator fallenden Strahlung in der Zeit dt der Energiebetrag:

$$dt \cdot \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} (\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega) \sin^2 \vartheta \, d\Omega$$

absorbiert.

Nun beträgt die spezifische Intensität der in der Richtung (ϑ, φ) auf den Oszillator fallenden Strahlung, soweit sie „absorbierbar" ist, d. h. die dem Oszillator entsprechende Schwingungs-

zahl und Polarisation besitzt, nach (299), da der Faktor $\frac{4\pi}{c}\,dv\,d\Omega$ hier wegzulassen ist:

$$(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega)\sin^2\vartheta\,. \tag{303}$$

Daraus ergibt sich der Satz: der absolute Betrag der vom Oszillator in der Zeit dt absorbierten Energie wird erhalten, wenn man die spezifische Intensität der in irgendeiner Richtung (ϑ, φ) auf ihn fallenden absorbierbaren Strahlung mit

$$dt \cdot \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu^2} \cdot d\Omega \tag{304}$$

multipliziert und diesen Ausdruck über alle Richtungen (ϑ, φ) integriert. Der Faktor $\frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu^2}$ bestimmt also die Breite des vom Oszillator aufgefangenen Strahlenbündels, indem er ein Maß liefert für das Produkt aus dem Querschnitt dieses Bündels am Orte des Oszillators und seiner Spektralbreite.

Auf der anderen Seite beträgt die vom Oszillator in der Zeit dt nach allen Richtungen emittierte Energie nach (288):

$$dt \cdot 2\sigma\nu U$$

oder, was dasselbe ist:

$$dt \cdot \frac{3\sigma\nu}{4\pi} U \cdot \int \sin^2\vartheta\, d\Omega\,.$$

Da nun die Intensität der vom Oszillator in der Richtung (ϑ, φ) emittierten Strahlung nach (150) unabhängig ist von φ und proportional $\sin^2\vartheta$, so beträgt die in der Zeit dt in dieser Richtung emittierte Energie:

$$dt \cdot \frac{3\sigma\nu}{4\pi} U \sin^2\vartheta\, d\Omega$$

und die spezifische Intensität der vom Oszillator in derselben Richtung emittierten Strahlung, durch Division mit (304):

$$\frac{\nu^2 U \sin^2\vartheta}{c^2}\,. \tag{305}$$

Für den am Schluß des vorigen Paragraphen betrachteten „stationären" Strahlungszustand ist

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' \quad \text{und} \quad U = \frac{c^3}{\nu^2}\,\mathfrak{K}\,.$$

Man sieht also, daß im stationären Strahlungszustand die spezifische Intensität (303) der in irgendeiner Richtung auf den

Oszillator fallenden absorbierbaren Strahlung gleich ist der spezifischen Intensität (305) der in derselben Richtung vom Oszillator emittierten Strahlung, wie es sein muß.

§ 185. Wir wollen nun, als Vorbereitung für die folgenden Deduktionen, die Eigenschaften der verschiedenen den Oszillator passierenden Strahlenbündel noch näher ins Auge fassen. Von allen Seiten treffen Strahlen auf den Oszillator; betrachten wir wieder diejenigen von ihnen, welche in der Richtung (ϑ, φ), innerhalb des Elementarkegels $d\Omega$, dessen Spitze im Oszillator liegt, auf ihn zulaufen, so können wir sie uns zunächst zerlegt denken in ihre monochromatischen Bestandteile, und brauchen uns nur mit demjenigen dieser Bestandteile weiter zu beschäftigen, welcher der Schwingungszahl ν des Oszillators entspricht; denn alle übrigen Strahlen streichen über den Oszillator einfach hinweg, ohne ihn zu beeinflussen oder von ihm beeinflußt zu werden. Die spezifische Intensität des monochromatischen Strahles von der Schwingungszahl ν ist:

$$\mathfrak{K} + \mathfrak{K}',$$

wenn $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die Hauptintensitäten vorstellen. Dieser Strahl wird nun je nach den Richtungen seiner Hauptpolarisationsebenen in zwei Komponenten (8) zerlegt.

Die eine Komponente:

$$\mathfrak{K}\cos^2\omega + \mathfrak{K}'\sin^2\omega$$

geht direkt über den Oszillator hinweg und tritt völlig ungeändert auf der anderen Seite wieder aus; sie liefert also einen in der Richtung (ϑ, φ) innerhalb der Kegelöffnung $d\Omega$ vom Oszillator ausgehenden geradlinig polarisierten Strahl, dessen Polarisationsebene durch die Achse des Oszillators hindurchgeht, und dessen Intensität beträgt:

$$\mathfrak{K}\cos^2\omega + \mathfrak{K}'\sin^2\omega = \mathfrak{K}''. \tag{306}$$

Die andere, senkrecht auf der vorigen polarisierte Komponente:

$$\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega$$

zerfällt wiederum in zwei Teile:

$$(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega)\cos^2\vartheta$$

und:

$$(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega)\sin^2\vartheta,$$

von denen der erste ungeändert durch den Oszillator hindurchpassiert, der zweite dagegen absorbiert wird. Statt des letzteren erscheint aber in der vom Oszillator ausgehenden Strahlung die Intensität des emittierten Strahles (305):

$$\frac{\nu^2 U \sin^2 \vartheta}{c^2}.$$

Diese liefert zusammen mit dem ersten, unverändert gebliebenen Teile die gesamte Intensität des vom Oszillator in der Richtung (ϑ, φ) innerhalb des Öffnungswinkels $d\Omega$ ausgehenden, senkrecht auf (306) polarisierten Strahles:

$$(\mathfrak{R} \sin^2 \omega + \mathfrak{R}' \cos^2 \omega) \cos^2 \vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2} \sin^2 \vartheta = \mathfrak{R}'''. \qquad (307)$$

Im ganzen haben wir also schließlich in der Richtung (ϑ, φ) innerhalb $d\Omega$ vom Oszillator ausgehend einen aus zwei senkrecht zueinander polarisierten Komponenten zusammengesetzten Strahl, dessen eine Polarisationsebene durch die Achse des Oszillators geht und dessen Hauptintensitäten die Werte $\mathfrak{R}''$ und $\mathfrak{R}'''$ besitzen.

§ 186. Es ist nun leicht, sich Rechenschaft zu geben von der Erhaltung der Gesamtenergie des Systems auf Grund der lokalen darin stattfindenden Energieänderungen.

Wenn gar kein Oszillator im Felde vorhanden ist, so behält ein jedes der unendlich vielen elementaren Strahlenbündel beim geradlinigen Fortschreiten mit seiner spezifischen Intensität auch seine Energie unverändert bei, auch bei der Reflexion an einer als eben und absolut spiegelnd vorausgesetzten Grenzfläche des Feldes.

Jeder Oszillator dagegen bewirkt im allgemeinen eine Änderung der ihn treffenden Strahlenbündel. Berechnen wir die ganze Energieänderung, die der oben betrachtete Oszillator in der Zeit dt in dem ihn umgebenden Felde hervorruft. Dabei brauchen wir nur diejenigen monochromatischen Strahlen zu berücksichtigen, welche der Schwingungszahl ν des Oszillators entsprechen, da die übrigen durch ihn gar nicht alteriert werden.

In der Richtung (ϑ, φ) innerhalb des Elementarkegels $d\Omega$ wird der Oszillator von einem irgendwie polarisierten Strahlenbündel getroffen, dessen Intensität durch die Summe der beiden Hauptintensitäten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ gegeben ist. Dieses Strahlenbündel

läßt, der Bedeutung des Ausdrucks (304) gemäß, in der Zeit dt die Energie:

$$(\mathfrak{K} + \mathfrak{K}')\,dt \cdot \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu} \cdot d\,\Omega$$

auf den Oszillator fallen, und dadurch wird auf der Seite der ankommenden Strahlen der nämliche Energiebetrag dem Felde entzogen. Auf der anderen Seite geht dafür vom Oszillator in derselben Richtung (ϑ, φ) ein in bestimmter Weise polarisiertes Strahlenbündel aus, dessen Intensität durch die Summe der beiden Hauptintensitäten $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$ gegeben ist. Dadurch wird dem umgebenden Felde in der Zeit dt der Energiebetrag

$$(\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''')\,dt \cdot \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu}\,d\,\Omega$$

zugeführt.

Im ganzen beträgt also die in der Zeit dt eingetretene Energieänderung des den Oszillator umgebenden Feldes, durch Subtraktion des vorletzten Ausdruckes vom letzten und Integration über $d\,\Omega$:

$$dt \cdot \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu} \int d\,\Omega\,(\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' - \mathfrak{K} - \mathfrak{K}').$$

Nimmt man dazu die in derselben Zeit eingetretene Energieänderung des Oszillators:

$$dt \cdot \frac{d\,U}{dt},$$

so verlangt das Prinzip der Erhaltung der Energie, daß die Summe der letzten beiden Ausdrücke verschwindet, d. h. daß

$$\frac{d\,U}{dt} + \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu} \int d\,\Omega\,(\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' - \mathfrak{K} - \mathfrak{K}') = 0, \tag{308}$$

und das ist in der Tat der Inhalt der beiden Gleichungen (296) und (301), wenn man berücksichtigt, daß nach (306) und (307):

$$\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' - \mathfrak{K} - \mathfrak{K}' = \left(\frac{\nu^2\,U}{c^2} - \mathfrak{K}\sin^2\omega - \mathfrak{K}'\cos^2\omega\right)\sin^2\vartheta.$$

§ 187. Wir bilden jetzt, entsprechend der totalen Energie U_t in (297), die totale Entropie des betrachteten Systems:

$$S_t = \sum S + \int s\,d\,\tau. \tag{309}$$

Die Summation Σ ist wieder über alle Oszillatoren, die Inte-

gration über alle Raumelemente $d\tau$ des durchstrahlten Feldes zu erstrecken. S, die Entropie eines einzelnen Oszillators, ist als Funktion von U gegeben durch (227), und s, die räumliche Entropiedichte in einem Punkte des Feldes, ist als Funktion aller Hauptstrahlungsintensitäten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gegeben durch (131), in Verbindung mit (129) und (229).

Nun wollen wir die Änderung berechnen, welche die totale Entropie S_t unseres Systems im Zeitelement dt erleidet. Wir halten uns dabei genau an die analoge im vorigen Paragraphen für die Energie des Systems durchgeführte Rechnung.

Wenn gar kein Oszillator vorhanden ist, so behält ein jedes der im Vakuum vorhandenen unendlich vielen Strahlenbündel beim geradlinigen Fortschreiten zugleich mit seiner spezifischen Intensität seine Entropie unverändert bei, auch bei der Reflexion an einer als eben und absolut spiegelnd vorausgesetzten Grenzfläche des Feldes. Durch die Strahlungsvorgänge im freien Felde kann also keine Entropieänderung des Systems hervorgerufen werden (vgl. § 162). Dagegen bewirkt jeder Oszillator im allgemeinen eine Entropieänderung der ihn treffenden Strahlenbündel. Berechnen wir die ganze Entropieänderung, welche der oben betrachtete Oszillator in der Zeit dt in dem ihn umgebenden Felde hervorruft. Dabei brauchen wir nur diejenigen monochromatischen Strahlen zu berücksichtigen, welche der Schwingungszahl ν des Oszillators entsprechen, da die übrigen durch ihn gar nicht alteriert werden.

In der Richtung (ϑ, φ), innerhalb des Elementarkegels $d\Omega$, wird der Oszillator von einem irgendwie polarisierten Strahlenbündel getroffen, dessen Energiestrahlung die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, und dessen Entropiestrahlung daher die Intensität $\mathfrak{L}+\mathfrak{L}'$ (§ 98) besitzt. Dieses Strahlenbündel läßt, der Bedeutung des Ausdruckes (304) gemäß, in der Zeit dt die Entropie:

$$(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}') \cdot dt \cdot \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \cdot d\Omega$$

auf den Oszillator fallen, und dadurch wird auf der Seite der ankommenden Strahlen der nämliche Entropiebetrag dem Felde entzogen. Auf der anderen Seite geht vom Oszillator in derselben Richtung (ϑ, φ) ein in bestimmter Weise polarisiertes Strahlenbündel aus, dessen Energiestrahlung die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$, und dessen Entropiestrahlung daher die

entsprechende Intensität $\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}'''$ besitzt. Dadurch wird dem umgebenden Felde in der Zeit dt die Entropie:

$$(\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''')\,dt \cdot \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \cdot d\Omega$$

zugeführt. Im ganzen beträgt also die in der Zeit dt eingetretene Entropieänderung des den Oszillator umgebenden Feldes, durch Subtraktion des vorletzten Ausdruckes vom letzten und Integration über $d\Omega$:

$$dt \cdot \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \cdot \int d\Omega\,(\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{L} - \mathfrak{L}'). \tag{310}$$

Nimmt man dazu die in derselben Zeit erfolgte Entropieänderung des Oszillators:

$$\frac{dS}{dt} \cdot dt = \frac{dS}{dU} \cdot \frac{dU}{dt} \cdot dt,$$

so ergibt sich durch Addition zu (310) und Summation über alle Oszillatoren die gesuchte Änderung der totalen Entropie des Systems:

$$\frac{dS_t}{dt} \cdot dt = dt \cdot \sum \left[\frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \int d\Omega\,(\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{L} - \mathfrak{L}') + \frac{dS}{dU} \cdot \frac{dU}{dt}\right]. \tag{311}$$

Wir wollen nun weiter den Nachweis führen, daß der Ausdruck hinter dem $\sum$-Zeichen stets positiv ist, inbegriffen den Grenzfall Null. Zu diesem Zwecke setzen wir für $\frac{dU}{dt}$ den in (308) gegebenen Wert und erhalten dadurch:

$$\frac{dS_t}{dt} = \sum \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \int d\Omega \Big(\mathfrak{L}'' - \mathfrak{R}'' \frac{dS}{dU} + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{R}''' \frac{dS}{dU} - \mathfrak{L} + \mathfrak{R} \frac{dS}{dU} - \mathfrak{L}' + \mathfrak{R}' \frac{dS}{dU}\Big).$$

Es erübrigt jetzt nur noch zu zeigen, daß der eingeklammerte Ausdruck für alle beliebigen Werte der positiven Größen U, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, ϑ, ω positiv ist, wobei nach Gleichung (306):

$$\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}\cos^2\omega + \mathfrak{R}'\sin^2\omega \tag{312}$$

und nach Gleichung (307):

$$\mathfrak{R}''' = (\mathfrak{R}\sin^2\omega + \mathfrak{R}'\cos^2\omega)\cos^2\vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2}\sin^2\vartheta.$$

Setzen wir zur Abkürzung die positive Größe:

$$\mathfrak{R}\sin^2\omega + \mathfrak{R}'\cos^2\omega = \mathfrak{R} + \mathfrak{R}' - \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}_0''', \tag{313}$$

so ist hiernach:

$$\mathfrak{R}''' = \mathfrak{R}_0'''\cos^2\vartheta + \frac{\nu^3 U}{c^3}\sin^2\vartheta. \tag{314}$$

Wir wollen zunächst das Glied:

$$\mathfrak{L}''' - \mathfrak{R}'''\frac{dS}{dU} = f(\mathfrak{R}''')$$

ins Auge fassen, indem wir darin U und folglich auch $\frac{dS}{dU}$ als konstant, dagegen $\mathfrak{R}'''$ und folglich auch $\mathfrak{L}'''$ als variabel betrachten. Mit Berücksichtigung von (229) und (227) ergibt sich dann:

$$\frac{df}{d\mathfrak{R}'''} = \frac{d\mathfrak{L}'''}{d\mathfrak{R}'''} - \frac{dS}{dU}$$

$$= \frac{k}{h\nu}\log\left(\frac{h\nu^3}{c^3\mathfrak{R}'''} + 1\right) - \frac{k}{h\nu}\log\left(\frac{h\nu}{U} + 1\right),$$

$$\frac{d^2f}{d\mathfrak{R}'''^2} = -\frac{k}{h\nu\mathfrak{R}'''}\cdot\frac{1}{1 + \frac{c^3\mathfrak{R}'''}{h\nu^3}} < 0.$$

Daraus folgt, daß die Funktion $f(\mathfrak{R}''')$ ein einziges Maximum besitzt, und zwar für $\mathfrak{R}''' = \frac{\nu^3}{c^3}U$.

Da nun nach (314) $\mathfrak{R}'''$ zwischen $\mathfrak{R}_0'''$ und $\frac{\nu^3 U}{c^3}$ liegt, so ist jedenfalls:

$$f(\mathfrak{R}''') > f(\mathfrak{R}_0'''),$$

d. h.

$$\mathfrak{L}''' - \mathfrak{R}'''\frac{dS}{dU} > \mathfrak{L}_0''' - \mathfrak{R}_0'''\frac{dS}{dU},$$

und um den Beweis durchzuführen, genügt es, den Ausdruck:

$$\mathfrak{L}'' - \mathfrak{R}''\frac{dS}{dU} + \mathfrak{L}_0''' - \mathfrak{R}_0'''\frac{dS}{dU} - \mathfrak{L} + \mathfrak{R}\frac{dS}{dU} - \mathfrak{L}' + \mathfrak{R}'\frac{dS}{dU}$$

oder, was nach (313) dasselbe ist, den Ausdruck:

$$(\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}_0''') - (\mathfrak{L} + \mathfrak{L}')$$

als positiv zu erweisen. Hierzu wollen wir setzen:

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'' + \mathfrak{R}_0''' = \mathfrak{S}.$$

$\mathfrak{R}''$ und $\mathfrak{R}_0'''$ liegen nach (312) und (313) zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$.

Betrachten wir jetzt die Größe:

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = F(\mathfrak{K})$$

als Funktion von $\mathfrak{K}$ allein, indem wir $\mathfrak{S}$ konstant nehmen und daher $\mathfrak{K}'$ als von $\mathfrak{K}$ abhängig ansehen, so handelt es sich nur noch um das Vorzeichen des Ausdruckes:

$$F(\mathfrak{K}') - F(\mathfrak{K}).$$

Nun ergibt sich nach (229) durch Differentiation:

$$\frac{dF}{d\mathfrak{K}} = \frac{k}{h\nu}\log\left(\frac{h\nu^3}{c^2\mathfrak{K}} + 1\right) - \frac{k}{h\nu}\log\left(\frac{h\nu^3}{c^2\mathfrak{K}'} + 1\right)$$

$$\frac{d^2F}{d\mathfrak{K}^2} = -\frac{k}{h\nu\mathfrak{K}}\cdot\frac{1}{1+\frac{c^2\mathfrak{K}}{h\nu^3}} - \frac{k}{h\nu\mathfrak{K}'}\cdot\frac{1}{1+\frac{c^2\mathfrak{K}'}{h\nu^3}} < 0.$$

Daraus folgt, daß die Funktion $F(\mathfrak{K})$ ein einziges Maximum besitzt, und zwar für $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' = \frac{\mathfrak{S}}{2}$, und daß sie zu beiden Seiten dieses Maximums symmetrisch abfällt. Je näher also das Argument $\mathfrak{K}$ dem Werte $\frac{\mathfrak{S}}{2}$ kommt, einerlei von welcher Seite her, desto größer wird der Wert von F.

Nun liegt $\mathfrak{K}''$ dem Werte $\frac{\mathfrak{S}}{2}$, welcher das arithmetische Mittel sowohl von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, als auch von $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}_0'''$ bildet, jedenfalls näher als $\mathfrak{K}$, weil $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}_0'''$ zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ liegen. Folglich ist $F(\mathfrak{K}'') > F(\mathfrak{K})$, und damit ist der Beweis für die Vermehrung der Entropie geliefert.

Jeder der betrachteten Strahlungsvorgänge verläuft also einseitig in dem Sinne wachsender Entropie, bis mit dem Maximum der Entropie auch der stationäre Strahlungszustand erreicht wird, welcher durch die Beziehungen charakterisiert ist:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' = \mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}_0''' = \mathfrak{K}''' = \frac{\nu^3 U}{c^2}.$$

Viertes Kapitel. Anwendung auf einen speziellen Fall. Schluß.

§ 188. Wir wollen noch zur Betrachtung des speziellen Falles übergehen, daß das Feld, in welchem der Oszillator liegt, sich in einem Zustand stationärer Strahlung befindet, während die Schwingungsenergie des Oszillators anfangs eine ganz be-

liebige sein möge. Eine Folge der stationären Strahlung im Vakuum ist, daß die auf den Oszillator fallenden Strahlen unpolarisiert und nach allen Richtungen gleichmäßig intensiv sind, d. h.

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' = \mathfrak{K}_0 = \text{const}$$

unabhängig von der Zeit und von der Richtung der Strahlung. Dann folgt aus (306) und (307):

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}_0, \qquad \mathfrak{K}''' = \mathfrak{K}_0 \cos^2\vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2}\sin^2\vartheta. \tag{315}$$

Ferner aus (308), da

$$\int \sin^2\vartheta \, d\Omega = \frac{8\pi}{3},$$

$$\frac{dU}{dt} + 2\sigma\nu U - \frac{2c^2\sigma}{\nu}\mathfrak{K}_0 = 0, \tag{316}$$

woraus sich die Schwingungsenergie U des Oszillators bei gegebenem Anfangswert als Funktion der Zeit t ergibt.

Die totale Entropieänderung des Systems in der Zeit dt folgt aus (311), da nur ein einziger Oszillator vorhanden ist, und da $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}_0$, zu:

$$dS_t = dS + \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} dt \cdot \int d\Omega\,(\mathfrak{L}''' - \mathfrak{L}_0). \tag{317}$$

Hier ist $\mathfrak{L}'''$ nach (229) von $\mathfrak{K}'''$ und dadurch auch vom Winkel ϑ abhängig.

Wenn nicht nur das den Oszillator umgebende Feld, sondern das ganze System sich im stationären Strahlungszustand befände, so wäre auch $\mathfrak{K}''' = \mathfrak{K}_0$, und die Energie U des Oszillators würde speziell:

$$U_0 = \frac{c^2}{\nu^2}\mathfrak{K}_0, \tag{318}$$

wie auch aus (315) zu ersehen. Wir wollen daher diesen Wert U_0 den stationären Wert der Energie des Oszillators nennen; ihm nähert sich U nach (316) für wachsende Zeiten asymptotisch an.

Nun besitze die Energie des Oszillators einen Wert, der nur noch wenig von dem stationären Wert U_0 verschieden ist, d. h.

$$U = U_0 + \Delta U. \tag{319}$$

Die kleine, positive oder negative, Größe ΔU können wir die Abweichung der Oszillatorenergie von ihrem stationären Wert nennen, sie ist zugleich ein Maß für die Gleichgewichtsstörung des ganzen betrachteten Systems. Dann wird aus (316) und (318):

$$\frac{dU}{dt} + 2\sigma\nu\,\Delta U = 0 \tag{320}$$

und aus (315):

$$\mathfrak{R}''' = \mathfrak{R}_0 + \frac{\nu^2}{c^2}\sin^2\vartheta\cdot\Delta U, \tag{321}$$

folglich, durch Entwicklung in eine Taylorsche Reihe und mit Vernachlässigung höherer Potenzen von ΔU:

$$\mathfrak{L}''' = \mathfrak{L}_0 + \left(\frac{d\mathfrak{L}}{d\mathfrak{R}}\right)_0 \frac{\nu^2}{c^2}\sin^2\vartheta\,\Delta U + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{d\mathfrak{R}^2}\right)_0 \frac{\nu^4}{c^4}\sin^4\vartheta\,(\Delta U)^2.$$

Führt man dies in (317) ein, so ergibt sich, da:

$$\int \sin^4\vartheta\, d\Omega = \frac{32\pi}{15},$$

$$dS_t = dS + 2\sigma\nu\,dt\cdot\left(\frac{d\mathfrak{L}}{d\mathfrak{R}}\right)_0 \Delta U + \frac{4\sigma\nu^3}{5c^2}dt\cdot\left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{d\mathfrak{R}^2}\right)_0 (\Delta U)^2,$$

oder nach (320), mit Elimination des Zeitelements dt:

$$dS_t = dS - dU\left\{\left(\frac{d\mathfrak{L}}{d\mathfrak{R}}\right)_0 + \frac{2\nu^2}{5c^2}\left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{d\mathfrak{R}^2}\right)_0 \Delta U\right\}.$$

Andererseits ist:

$$dS = \frac{dS}{dU}\cdot dU$$

und nach (319):

$$\frac{dS}{dU} = \left(\frac{dS}{dU}\right)_0 + \left(\frac{d^2S}{dU^2}\right)_0 \Delta U + \ldots.$$

Folglich durch Substitution die Entropieänderung des ganzen Systems, unter Vernachlässigung höherer Potenzen von ΔU:

$$dS_t = dU\left[\left(\frac{dS}{dU}\right)_0 - \left(\frac{d\mathfrak{L}}{d\mathfrak{R}}\right)_0 + \left\{\left(\frac{d^2S}{dU^2}\right)_0 - \frac{2\nu^2}{5c^2}\left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{d\mathfrak{R}^2}\right)_0\right\}\Delta U\right]. \tag{322}$$

Da beim thermodynamischen Gleichgewicht die Temperatur der freien Strahlung gleich derjenigen des Oszillators ist, so folgt aus (135) und (199):

$$\left(\frac{d\mathfrak{L}}{d\mathfrak{R}}\right)_0 = \left(\frac{dS}{dU}\right)_0$$

und durch Differentiation dieser Gleichung, mit Rücksicht auf (318):

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{d\mathfrak{P}^2}\right)_0 = \frac{c^2}{\nu^2}\left(\frac{d^2S}{dU^2}\right)_0.$$

Dadurch geht der Ausdruck (322) über in:

$$dS_t = \frac{3}{5}\,dU\cdot\Delta U\cdot\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{3}{5}\,k\cdot\frac{dU\cdot\Delta U}{U(U+h\nu)}, \qquad (323)$$

indem der Wert von S aus (227) eingesetzt und der Index 0 bei U jetzt als überflüssig fortgelassen ist.

Dieser Ausdruck stellt also die Entropievermehrung dar, welche in der Natur eintritt, wenn ein in einem stationären Strahlungsfeld befindlicher Oszillator, dessen Energie eine kleine, positive oder negative, Abweichung ΔU von ihrem stationären Wert U aufweist, die unendlich kleine Energieänderung dU erleidet, natürlich auf Kosten bez. zugunsten der Energie des Strahlungsfeldes. Die Entropievermehrung hängt also außer von der Schwingungszahl ν nur ab von dU, ΔU und U, nicht von dem Dämpfungsdekrement des Oszillators, und ist überdies, wie auch von vornherein einleuchtet, den Werten von dU und von ΔU proportional. Da sie stets positiv ist, so besitzen dU und ΔU entgegengesetzte Vorzeichen, wie natürlich.

§ 189. Denken wir uns nun, daß in dem betrachteten stationären Strahlungsfeld statt eines einzigen Oszillators eine beliebige Anzahl n mit dem bisher betrachteten ganz gleichbeschaffene Oszillatoren vorhanden sind, in denen sich während des Zeitelementes dt genau die nämlichen Vorgänge[1] abspielen. Dann ist die Energie aller Oszillatoren zusammengenommen die Summe der Einzelenergien: $nU = U_n$, ihre Abweichung von dem stationären Wert: $\Delta U_n = n\cdot\Delta U$, ihre Änderung im Zeitelement dt: $dU_n = n\,dU$, endlich ihre Entropie, als Summe aller Einzelentropien: $S_n = n\,S$.

Die gesamte Entropievermehrung in diesem System, die wir mit $d\sum_t$ bezeichnen wollen, ist gleich dem n fachen des Ausdrucks (323), da sich n einander ganz gleiche Vorgänge gleichzeitig und unabhängig voneinander abspielen, also:

[1] natürlich nur bezüglich der Energien, nicht etwa in dem Sinne, daß die Schwingungen kohärent sind.

$$(324) \qquad d\sum_t = n \cdot \frac{3}{5} dU \cdot \Delta U \cdot \frac{d^2 S}{dU^2} = - n \cdot \frac{3}{5} k \cdot \frac{dU \cdot \Delta U}{U(U + h\nu)}$$

oder mit Einführung von U_n, ΔU_n, dU_n und S_n:

$$(325) \qquad d\sum_t = \frac{3}{5} dU_n \cdot \Delta U_n \cdot \frac{d^2 S_n}{dU_n^2} = - \frac{3}{5} k \cdot \frac{dU_n \cdot \Delta U_n}{U_n\left(\frac{U_n}{n} + h\nu\right)}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem ganz analog gebauten in (323), so erhellt, daß die Entropievermehrung des Systems außer von der Schwingungszahl ν nicht allein von U_n, ΔU_n und dU_n abhängt, sondern auch von der Zahl n explizite.

Diese Folgerung, zu der der Ausdruck (227) der Entropie S mit Notwendigkeit führt, erschien mir, da die Gleichungen (323) und (325) sich sonst in ihrem Bau durch nichts unterscheiden, anfangs als auffällig und nicht wohl annehmbar. Daher setzte ich zu einer Zeit, als noch kein direkter Weg zur Berechnung der Strahlungsentropie bekannt war, statt der Gleichung (325) die folgende:

$$(326) \qquad d\sum_t = \frac{3}{5} dU_n \cdot \Delta U_n \cdot \frac{d^2 S_n}{dU_n^2} = - dU_n \cdot \Delta U_n \cdot f(U_n)$$

mit der Annahme, daß die positive Funktion f nur von U_n, nicht aber von n abhängt. Dadurch geht (323) über in:

$$(327) \qquad dS_t = \frac{3}{5} dU \cdot \Delta U \cdot \frac{d^2 S}{dU^2} = - dU \cdot \Delta U \cdot f(U),$$

und da $d\sum_t = n \cdot dS_t$, wie wir schon oben zur Ableitung von (324) benutzten, so folgt:

$$dU_n \cdot \Delta U_n \cdot f(U_n) = n\, dU \cdot \Delta U \cdot f(U)$$

oder, mit Einführung von U statt U_n:

$$n \cdot f(nU) = f(U).$$

Die allgemeine Lösung dieser Funktionalgleichung ist:

$$f(U) = \frac{\text{const}}{U}$$

und daraus folgt nach (327):

$$(328) \qquad \frac{d^2 S}{dU^2} = - \frac{5}{3} f(U) = - \frac{\text{const}}{U}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt für S gerade diejenige Funktion von U, welche in der Beziehung (239) ausgedrückt ist, und die zum WIENschen Energieverteilungsgesetz führt. Daher hielt ich eine Zeitlang jene Beziehung für den allgemeinen Ausdruck der Entropie eines Oszillators der betrachteten Art, und dementsprechend das WIENsche Energieverteilungsgesetz für das allgemeine Spektralgesetz, was auch die Messungen von F. PASCHEN zu bestätigen schienen.[1]

Erst die Versuche von O. LUMMER und E. PRINGSHEIM[2] haben gezeigt, daß das WIENsche Energieverteilungsgesetz nur bedingungsweise gilt, nämlich dann, wenn die Strahlungsintensität, und daher auch die Energie U, einen verhältnismäßig kleinen Wert besitzt. Für größere Werte von U nähert sich dagegen, wie besonders deutlich aus den Messungen von H. RUBENS und F. KURLBAUM hervorgeht,[3] die Energiestrahlung merklich dem RAYLEIGHschen Gesetz (§ 154), nach welchem statt der Beziehung (328) die folgende gilt:

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{\text{const}}{U^2}, \tag{329}$$

wie man unmittelbar aus der Gleichung (244) findet.

Versucht man, die beiden in speziellen Gebieten, für kleine U und für große U, gültigen Formeln (328) und (329) in eine einzige allgemeinere zu vereinigen, so bietet sich als die einfachste Fassung die folgende dar:

$$\frac{d^2 S}{dU^2} = -\frac{\text{const}}{U(U + \text{const})},$$

welche mit (323) genau übereinstimmt und durch zweimalige Integration nach U zu der Gleichung (227) führt; denn die Abhängigkeit von der Schwingungszahl ν ist ja durch das WIENsche Verschiebungsgesetz (223) festgelegt.

---

[1] F. PASCHEN, Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wissensch. 1899, p. 405, 893. WIED. Ann. **60**, p. 662, 1897.

[2] O. LUMMER und E. PRINGSHEIM, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **2**, p. 163, 1900. Vgl. aber auch H. BECKMANN, Inaugural-Dissertation, Tübingen 1898. H. RUBENS, WIED. Ann. **69**, p. 582, 1899.

[3] H. RUBENS und F. KURLBAUM, Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wissensch. vom 25. Oktober 1900, p. 929.

Dies ist der Weg, auf welchem die Beziehung (227) und das dadurch bedingte Strahlungsgesetz (234) ursprünglich gefunden wurde.

§ 190. Schluß. Die hier entwickelte Theorie der irreversibeln Strahlungsvorgänge gibt eine Erklärung dafür, wie in einem durchstrahlten, von Oszillatoren aller möglichen Eigenschwingungen erfüllten Hohlraum bei beliebig angenommenem Anfangszustand sich mit der Zeit ein stationärer Zustand herstellt, indem die Intensitäten und Polarisationen aller Strahlen sich nach Größe und Richtung gegenseitig ausgleichen. Aber die Theorie läßt noch eine wesentliche Lücke. Denn sie behandelt nur die Wechselwirkungen zwischen Strahlen und Oszillatorschwingungen der nämlichen Periode. Für eine bestimmte Schwingungszahl ist die vom zweiten Hauptsatz der Thermodynamik geforderte Vermehrung der Entropie bis zur Erreichung des Maximalwertes in jedem Zeitelement auf rein elektrodynamischem Wege nachgewiesen. Aber für alle Schwingungszahlen zusammengenommen bedeutet das so erreichte Maximum noch nicht das absolute Maximum der Entropie des Systems, und der entsprechende Strahlungszustand bezeichnet im allgemeinen nicht das absolut stabile Gleichgewicht (vgl. § 27). Denn darüber, wie sich Strahlungsintensitäten, die verschiedenen Schwingungszahlen entsprechen, gegenseitig ausgleichen, wie sich also aus einer anfangs vorhandenen beliebigen spektralen Energieverteilung mit der Zeit die normale, der schwarzen Strahlung entsprechende Energieverteilung entwickelt, erteilt diese Theorie keinerlei Aufschluß. Die hier der Betrachtung zugrunde gelegten Oszillatoren beeinflussen eben nur die Intensitäten der Strahlen, die ihrer Eigenschwingung entsprechen, sie vermögen aber nicht, deren Schwingungszahlen zu verändern, solange sie keine anderen Wirkungen ausüben und erleiden als daß sie strahlende Energie emittieren und absorbieren.[1]

Um einen Einblick in diejenigen Vorgänge zu erhalten, durch welche sich in der Natur der Austausch von Energie zwischen Strahlen verschiedener Schwingungszahlen vollzieht, bedürfte es jedenfalls auch der Untersuchung des Einflusses,

[1] Vgl. P. Ehrenfest, Wien. Ber. **114** [2a], p. 1301, 1905.

welchen eine Bewegung der Oszillatoren auf die Strahlungsvorgänge ausübt. Denn sobald die Oszillatoren sich bewegen, kommt es zu Zusammenstößen zwischen ihnen, und bei jedem Zusammenstoß müssen Wirkungen ins Spiel treten, welche die Schwingungsenergie der Oszillatoren noch in ganz anderer und in viel radikalerer Weise beeinflussen, als die einfache Emission und Absorption strahlender Energie. Das Endresultat aller derartiger Stoßwirkungen läßt sich allerdings mit Hilfe der im vierten Abschnitt angestellten Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen voraussehen; wie im einzelnen und in welchen Zeiträumen aber dies Resultat zustande kommt, dies zu lehren wird erst die Aufgabe einer künftigen Theorie sein. Von einer solchen Theorie sind dann sicherlich auch weitergehende Aufschlüsse über die Konstitution der in der Natur vorhandenen Oszillatoren zu erwarten, schon deshalb, weil sie jedenfalls auch eine nähere Erklärung für die physikalische Bedeutung des universellen Wirkungselements h (§ 149) bringen muß, welche der des elektrischen Elementarquantums sicherlich nicht nachsteht.

Verzeichnis

der vom Verfasser bisher veröffentlichten Schriften aus dem Gebiete der Wärmestrahlung, mit Angabe derjenigen Paragraphen dieses Buches, in denen der nämliche Gegenstand behandelt ist.

Absorption und Emission elektrischer Wellen durch Resonanz. Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wissensch. vom 21. März 1895, p. 289—301. Wied. Ann. **57**, p. 1—14, 1896. (§§ 112—115.)

Über elektrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden. Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wissensch. vom 20. Februar 1896, p. 151—170. Wied. Ann. **60**, p. 577—599, 1897. (§§ 104—115.)

Über irreversible Strahlungsvorgänge. (Erste Mitteilung.) Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wissensch. vom 4. Februar 1897, p. 57—68. (§ 104ff.)

Über irreversible Strahlungsvorgänge. (Zweite Mitteilung.) Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wissensch. vom 8. Juli 1897, p. 715—717. (§ 168.)

Über irreversible Strahlungsvorgänge. (Dritte Mitteilung.) Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wissensch. vom 16. Dezember 1897, p. 1122—1145. (§§ 169—171.)

Über irreversible Strahlungsvorgänge. (Vierte Mitteilung.) Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wissensch. vom 7. Juli 1898, p. 449—476. (§§ 169—171.)

Über irreversible Strahlungsvorgänge. (Fünfte Mitteilung.) Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wissensch. vom 18. Mai 1899, p. 440—480. (§§ 175—187. § 159.)

Über irreversible Strahlungsvorgänge. Drudes Ann. **1**, p. 69—122, 1900. (§§ 128—132. §§ 175—187. § 159.)

Entropie und Temperatur strahlender Wärme. Drudes Ann. **1**, p. 719—737, 1900. § 101. §§ 188f. § 162.

Über eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **2**, p. 202—204, 1900. § 189.

Ein vermeintlicher Widerspruch des magneto-optischen Faraday-Effektes mit der Thermodynamik. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **2**, p. 206—210, 1900.

Kritik zweier Sätze des Herrn W. Wien. Drudes Ann. **3**, p. 764—766, 1900.

Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **2**, p. 237—245, 1900. (§§ 146—152. § 158.)

Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum. Drudes Ann. p. 553—563, 1901. (§§ 145—157.)

Über die Elementarquanta der Materie und der Elektrizität. Drudes Ann. p. 564—566, 1901. (§ 158.)

Über irreversible Strahlungsvorgänge (Nachtrag). Sitzungsber. d. k. preuß. Akad. d. Wissensch. vom 9. Mai 1901, p. 544—555. Drudes Ann. **6**, p. 818—831, 1901. (§ 187.)

Vereinfachte Ableitung der Schwingungsgesetze eines linearen Resonators im stationär durchstrahlten Felde. Physikalische Zeitschrift **2**, p. 530 bis p. 534, 1901. (§§ 116—123.)

Über die Natur des weißen Lichtes. Drudes Ann. **7**, p. 390—400, 1902. (§ 160. § 176. § 180.)

Über die von einem elliptisch schwingenden Ion emittierte und absorbierte Energie. Archives Néerlandaises, Jubelband für H. A. Lorentz, 1900, p. 164—174. Drudes Ann. **9**, p. 619—628, 1902.

Über die Verteilung der Energie zwischen Äther und Materie. Archives Néerlandaises, Jubelband für J. Bosscha, 1901, p. 55—66. Drudes Ann. **9**, p. 629—641, 1902. (§§ 138—144.)

Verlag von **Johann Ambrosius Barth** in **Leipzig.**

BJERKNES, V., Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie. Zwei Bände. 1900—1902. à M. 10.—, geb. M. 11.50.
I. Band. [XVI, 338 Seiten mit 40 Abbildungen.] 1900.
II. Band. [XVI, 316 Seiten mit 60 Abbildungen.] 1902.

BOLTZMANN, L., Populäre Schriften. [VIII, 438 S.] 1905. M. 8.—, geb. M. 9.—.
Physikalische Zeitschrift: Daß die Lektüre des Werkes jedem Leser unserer Zeitschrift genußreiche Stunden bereiten wird, bedarf wohl kaum der Versicherung. Vorträge über grundlegende Fragen der exakten Wissenschaften, Gedächtnisreden auf Kirchhoff, Stefan, Loschmidt, Erörterungen über philosophische Gegenstände und last not least die Reise eines deutschen Professors ins Eldorado voll köstlichen Humors, Ernst und Scherz in geistvollem Geplauder vermengend, das alles zieht an dem Leser vorüber, auch Überraschungen harren desselben, die aber hier nicht verraten werden sollen. Muß der Referent jetzt noch versichern, daß die populären Schriften Boltzmanns auch in den Händen der übrigen Leser sein sollten?

BOLTZMANN, L., Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektricität und des Lichtes. *I. Teil.* [XII, 139 Seiten mit vielen Textfiguren und zwei lithographischen Tafeln.] 1891. *II. Teil.* [VIII, 166 Seiten mit Figuren im Text und zwei Tabellen.] 1893. je M. 5.—, geb. M. 6.—.
Nur ein Boltzmann konnte den oft unentwirrbar komplizierten Plan des Maxwellschen Lehrgebäudes bis in alle Details so verstehen, um ihn mit dieser Klarheit bloßzulegen. Aus den einfachsten Annahmen — den Gesetzen der cyklischen Bewegungen und der Lagrangeschen Gleichung — entwickeln sich die weittragendsten Schlüsse mit einer Klarheit und Eleganz, die neben der vollendeten wissenschaftlichen Befriedigung auch einen hervorragenden ästhetischen Genuß bietet.

BOLTZMANN, L., Vorlesungen über Gastheorie. *I. Teil:* Theorie der Gase mit einatomischen Molekülen, deren Dimensionen gegen die mittlere Weglänge verschwinden. [IV, 200 Seiten.] 1895. M. 6.—, geb. M. 7.—. *II. Teil.* Über die van der Waals'sche Theorie, die Gase mit mehratomigen Molekülen und die Dissoziation. [X, 265 Seiten.] 1898. M. 7.—, geb. M. 8.—

BOLTZMANN, L., Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. *I. Teil:* [X, 241 S.] 1897. M. 6.—, geb. M. 7.—.
II. Teil, enthaltend: **Die Wirkungsprinzipe, die Lagrangeschen Gleichungen und deren Anwendungen.** [X, 336 S. m. 10 Fig.] 1904. M. 9.—, geb. M. 10.—.

CHRISTIANSEN-MÜLLER, Elemente der theoretischen Physik, von Prof. C. Christiansen in Kopenhagen, deutsch herausgegeben von Dr. Johannes Müller in Bremen. Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage. [XII, 532 Seiten mit 160 Figuren.] 1903. M. 10.—, geb. M. 11.—.
Es wird in den beteiligten Kreisen mit Freude begrüßt werden, daß von dem vortrefflichen Buche eine neue Auflage erschien. Da dieselbe erweitert und bedeutend verbessert ist, wird sie noch größere Verbreitung finden als die erste Auflage. Die jungen Physiker und Mathematiker werden durch das Buch bei ihren Studien wesentlich gefördert.

CLAUSIUS, R., Die Potentialfunktion und das Potential. Ein Beitrag zur mathematischen Physik. 4. vermehrte Auflage. 8°. [178 Seiten.] 1885. M. 4.—.

FISCHER, Viktor, Grundbegriffe und Grundgleichungen der Mathematischen Naturwissenschaft. [VIII, 108 Seiten mit 12 Fig.] 1906. M. 4.50.
Der Zweck dieses Buches ist, eine allgemein gültige Einteilung der physikalischen Begriffe zu treffen, das ihnen Gemeinsame hervorzuheben und zu zeigen, wie sie alle in gleicher Weise demselben Erhaltungsprinzip unterworfen sind. Zur Erläuterung werden Beispiele aus verschiedenen Gebieten der Physik herangezogen. Es wird auch immer betont, in welcher Richtung die weitere Entwicklungsmöglichkeit der Grundgleichungen liegt.

FISCHER, VIKTOR, Vektordifferentiation und Vektorintegration. 8°. [VI, 82 S. mit 20 Figuren.] 1904. M. 3.—.
Diese Arbeit ist dadurch entstanden, daß der Autor versuchte, sich für einige Operationen der Differential- und Integralrechnung in der Vektoranalyse ein geometrisches Bild zu verschaffen. Dabei wurde er zunächst auf die Untersuchungen des Differentialquotienten eines Vektors nach einem andern Vektor geführt. Aus dieser ergab sich eine allgemeinere Auffassung des Differenzialquotienten. Die enthaltenen Ausdrücke ließen sich auch durch einfache geometrische Konstruktionen bestimmen und erhielten bei der Anwendung auf physikalische Beispiele eine klare Bedeutung.

GARBASSO, A., Vorlesungen über theoretische Spektroskopie. [VIII, 256 Seiten mit 65 Fig.] 1906. M. 7.—, geb. M. 8.—.

Prof. G. in Genua, ein Schüler von Helmholtz, hat in 20 Vorlesungen das ganze Gebiet der Spektroskopie und Spektralanalyse, soweit sie bis jetzt der Theorie zugänglich waren, behandelt, wobei er sich besonders auf physikalisch gut definierte Vorstellungen beschränkte.

GIBBS, J. Willard, Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik, entwickelt besonders im Hinblick auf eine rationelle Begründung der Thermodynamik. Deutsch bearb. v. Ernst Zermelo. [XI, 216 S.] 1905. M. 10.—, geb. M. 11.—.

Das letzte Werk des jüngst verstorbenen amerikanischen Physikers wird hiermit dem deutschen Publikum in einer guten Übersetzung geboten. Es ist der erste Versuch, die statistischen und die Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen in der Mechanik, wie sie auf verschiedenen Gebieten der Physik, namentlich aber in der kinetischen Gastheorie unentbehrlich sind, unabhängig von ihrem Anwendungsgebiet auf sicherer Grundlage mathematisch streng zu entwickeln.

GRÜNBERG, V., Hypothese zur Thermodynamik. Versuch einer leicht faßlichen Darstellung einiger Prinzipe der Molekulartheorie mit Zugrundelegung der Keplerschen Gesetze für die Planetenbewegung. [VI, 73 Seiten mit 10 Fig. und 7 Tab.] 1903. M. 3.—.

HAMILTON, W. ROWAN, Elemente der Quaternionen. Deutsch von Dr. Paul Glan. 2 Bände. 8°. 1882—84. M. 34.—.

HELMHOLTZ, H. v., Vorlesungen über theoretische Physik. In 6 Bänden.

I. Band, 1. Abtlg.: Einleitung zu den Vorlesungen über theoretische Physik, herausgegeben von Arthur König und Carl Runge. [VIII, 50 S. mit 1 Porträt.] 1903. M. 3.—, geb. M. 4.50.

I. Band, 2. Abtlg.: Dynamik diskreter Massenpunkte, herausgegeben von Otto Krigar-Menzel. [X, 380 S. mit 21 Fig.] 1898. M. 15.—, geb. M. 16.50.

II. Band: Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen, herausgegeben von Otto Krigar-Menzel. [VIII, 248 S. mit 9 Fig.] 1902. M. 12.—, geb. M. 13.50.

III. Band: Mathematische Principien der Akustik, herausgegeben von Arthur König und Carl Runge. [XIV, 256 S. mit 21 Fig.] 1898. M. 12.—, geb. M. 13.50.

V. Band: Elektromagnetische Theorie des Lichtes, herausgegeben von Arthur König und Carl Runge. [XII, 370 S. mit 54 Fig.] 1897. M. 14.—, geb. M. 15.50.

VI. Band: Theorie der Wärme, herausgegeben von Franz Richarz. [XII, 418 S. mit 40 Fig.] 1903. M. 16.—, geb. M. 17.50.

Band IV soll bald folgen.

HELMHOLTZ, H. v., Wissenschaftliche Abhandlungen. 3 Bände. [Mit 2 Porträts und 8 lithographischen Tafeln, in Leinen gebunden unbeschnitten.] M. 58.—. (I. Band VIII, 938 Seiten. 1882. M. 20.—. II. Band VIII, 1021 Seiten. 1883. M. 20.—. III. Band XXXIX, 654 Seiten. 1895. M. 18.—.)

Die wissenschaftlichen Arbeiten von Helmholtz sind von beträchtlichem Einfluß auf den Entwickelungsgang der theoretischen Physik unserer Zeit gewesen. Durch die Vereinigung der seiner Zeit als Einzeldrucke oder in verschiedenen wissenschaftlichen Zeitschriften erschienenen Arbeiten in gleichmäßigem modernen Wiederabdruck werden dieselben der wissenschaftlichen Welt bequem zugänglich gemacht.

HERTZ, H., Gesammelte Werke. Band I. Schriften vermischten Inhalts. [XIX, 368 Seiten mit vielen Fig., 1 Tafel.] Einleitung von Ph. Lenard u. Porträt des Verf. 1895. Preis M. 12.—. Band II. Untersuchungen üb. die Ausbreitung der elektr. Kraft. [VIII, 296 S. m. 40 Fig.] 2. Aufl. 1895. M. 6.—. Band III. Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Mit einem Vorwort von H. v. Helmholtz. [XXIX, 312 S.] 1894. M. 12.—. In Halbfranz gebunden jeder Band M. 1.50 mehr.

Das Lebenswerk des früh dahingegangenen Gelehrten liegt in den vorstehenden drei Bänden abgeschlossen vor. Je mehr man sich in die geistvollen und klaren Darstellungen versenkt, um so mehr bedauert man, daß der Tod seinem Wirken ein so kurzes Ziel gesteckt hat.